Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2024-2025.

Fiche 43 : TD du 23-01.

Exercice 1

Soient $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / x+y+z+t=0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / x+y=z+t \right\}$.
Déterminer $\dim E, \dim F, \dim(E+F), \dim(E \cap F)$.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les quatre vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $V = Vect(v_1, v_2, v_3, v_4)$. De plus, soit

$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \quad -3x+y+2z-t=0\}.$$

1. Montrer que $\dim V = 2$. Le systême (v_1, v_2, v_3, v_4) est-il libre ? Est-il générateur de $\mathbb{R}^4$?
2. Donner une base de V, la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Calculer des équations cartésiennes pour V.
4. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
5. Trouver une représentation paramétrique de H, et en déduire une base de H. Que vaut $\dim H$?
6. Montrer que $v_3 \in H$ et que $v_1 \notin H$. En déduire $\dim(V \cap H)$ et $\dim(V+H)$.
7. Donner une base de $V \cap H$.

Exercice 3

Soient P_0, P_1, P_2 et $P_3 \in \mathbb{R}_2[X]$ définis par

$$P_0(X) = \frac{(X-1)(X-2)}{2}, \quad P_1(X) = \frac{X(X-1)}{2},$$

$$P_2(X) = X(2-X), \quad P_3(X) = \frac{(X-1)(X-3)}{3}.$$

Exprimer $1,\ X,\ X^2$ en fonction de P_0, P_1 et P_2. On note $F = Vect\{P_0, P_1\}$ et $G = Vect\{P_2, P_3\}$. Calculer $\dim F$, $\dim G$, $\dim(F+G)$ et $\dim(F \cap G)$. Vérifier que

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Exercice 4 : Polynômes de Bernoulli

On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$.
On considère

$$H = \left\{ P \in E / \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$$

1. Montrer que H est un sous espace vectoriel de E.

   On considère l'application : $D : \begin{cases} H \to E \\ P \to P' \end{cases}$.
2. Montrer que D est une bijection, on note I sa réciproque.
3. On considère la suite définie par $B_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $B_{n+1} = I(B_n)$, autrement dit $B_n = B'_{n+1}$ et $B_{n+1} \in H$.
   (a) Déterminer B_0, B_1, B_2, B_3.
   (b) Montrer que la suite $((B_n))_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base de E.