Fiche 44 : Espaces vectoriels.

Exercice 1

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on pose $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{\alpha x}$.
Montrer que la famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 2

Donner la dimension du sous-espace F de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par :

$$f_1 = x \to \sin^2(x), f_2 = x \to \cos^2(x), f_3 = x \to \sin(2x), f_4 = x \to \cos(2x)$$

Exercice 3

Soit C l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissantes sur $\mathbb{R}$.

1. C est-il un espace vectoriel (pour les opérations usuelles) ?
2. Montrer que $V = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \ \exists (g,h) \in C^2 \text{ tel que } f = g - h\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. Montrer que la fonction $x \to x^2$ appartient à V.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ (polynômes de degré $\leq n$), et $P \in E$.

1. Montrer que l'ensemble F_P des polynômes de E multiples de P est un sous-espace vectoriel de E. Quelle en est la dimension en fonction du degré de P ?
2. Soit $Q \in E$ un polynôme premier avec P, et tel que $\deg P + \deg Q = n + 1$. Montrer que $E = F_P \oplus F_Q$.
3. En déduire qu'il existe deux polynômes U et V de E tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 5

Soit $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P = (1 - X)Q(X^2) \text{ avec } Q \in \mathbb{R}[X]\}$.

Montrer que A est un $\mathbb{R}$-ev et que l'on a :

$$\mathbb{R}[X] = A \oplus \{ \text{ polynômes pairs } \}$$

A-t-on $\mathbb{R}[X] = A \oplus \{$ polynômes impairs $\}$?