Limites et continuité des fonctions

1 Étude locale des fonctions

1.1 Notion de propriété locale

On considère f une fonction définie sur un intervalle I non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 1 *Si J est une partie non vide de I, on définit la **restriction** notée $f_{/J}$ de f à J par :*

$$f_{/J} \begin{cases} J \to \mathbb{R} \\ x \to f(x) \end{cases}$$

par définition les fonctions f et $f_{/J}$ coïncident sur J.

Si a est un réel de I, on dit que f vérifie une propriété P **au voisinage de** a s'il existe un intervalle J ouvert contenant a (typiquement de la forme $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ avec $\epsilon > 0$) tel que $f_{/J\cap I}$ vérifie la propriété P.

On dit que f vérifie une propriété P **au voisinage de** $+\infty$ s'il existe un intervalle ouvert J de la forme $]A, +\infty[$ tel que $f_{/J\cap I}$ vérifie la propriété P.

On dit que f vérifie une propriété P **au voisinage de** $-\infty$ s'il existe un intervalle ouvert J de la forme $]-\infty, A[$ tel que $f_{/J\cap I}$ vérifie la propriété P.

1.2 Limite d'une fonction (cas fini)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un réel qui est soit un point de I soit une borne de I.

Soit l un réel.

Définition 2 *On dit que la fonction f* ***tend vers*** *l ou* ***a la limite finie*** *l en a et on note :*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{a} f = l \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$$

quand :

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists \alpha_\epsilon > 0)(\forall x \in I \cap]a-\alpha_\epsilon, a+\alpha_\epsilon[) \quad |f(x)-l| \leq \epsilon \quad \text{ou} \quad l-\epsilon \leq f(x) \leq l+\epsilon$$

Propriété 1 *On observe alors que :*

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \textit{ quand } f(x)-l \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \textit{ c'est à dire quand } f(a+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} l$$

On suppose ici que $+\infty$ est une borne de I.

Définition 3 *On dit que la fonction f* ***tend vers*** *l ou* ***a la limite*** *l en $+\infty$ et on note :*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = l \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} l$$

quand :

$$(\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists A_\epsilon > 0)(\forall x \in I \cap]A_\epsilon, +\infty[) \quad |f(x)-l| \leq \epsilon \quad \text{ou} \quad l-\epsilon \leq f(x) \leq l+\epsilon$$

Si $-\infty$ est une borne de I, on dit que $f(x)$ tend vers l en $-\infty$ quand : $f(-x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} l$.

Propriété 2 *Dans les condition précédentes :*

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} l \textit{ quand } f(x)-l \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Concernant les limites finies, on a les résultats suivants :

Propriété 3 *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point de I ou une borne de I.*

Si la fonction f a une limite finie en a alors elle est bornée au voisinage de a. Si de plus cette limite est strictement positive alors la fonction f est minorée au voisinage de a par une constante strictement positive.

Concernant les inégalités, on a les règles suivantes (attention au passage aux inégalités larges !)

Propriété 4 *Si $(\forall x \in I) \quad f(x) < g(x)$, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l'$ alors :*

$$l \leq l'$$

Si $(\forall x \in I) \quad f(x) < A \in \mathbb{R}$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ alors :

$$l \leq A$$

Les règles de calcul suivantes permettent de calculer rapidement les limites simples :

Théorème 1 *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point de I ou une borne de I.*
Si les fonctions f et g, définies sur I, admettent des limites finies en a alors les fonctions $f+g$, $f.g$, $\lambda.f$ admettent une limite finie en a. En particulier, l'ensemble des fonctions f définies sur I et ayant une limite finie en a est un espace vectoriel réel.
On a de plus les régles opératoires

suite	f	g	$f+g$	$f.g$	λf
limite	l	l'	$l+l'$	$l.l'$	λl

Remarquons que ces règles entraînent que l'ensemble des fonctions f définies sur I et tendant vers 0 en a est un espace vectoriel avec de plus la règle suivante :

Propriété 5 *Si la fonction f tend vers 0 en a et si la fonction g est bornée au voisinage de a alors la fonction $f.g$ tend vers 0 en a.*

Théorème 2 *Soit f, g, h des fonctions définies sur I telles que :*

$$(\forall x \in I) \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Si f et h ont la même limite l en a alors $g(x)$ tend vers l :

$$g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$$

Par application directe, on a :

Propriété 6 *Si $|f(x)| \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ alors :*

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$$

1.3 Limite d'une fonction (cas infini)

Soit f une fonction définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et a un réel qui est soit un point de I soit une borne de I.

Définition 4 *On dit que la fonction f **tend vers** $+\infty$ ou **a la limite** $+\infty$ en a et on note :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{a} f = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$$

quand :

$$(\forall A \in \mathbb{R}_+)(\exists \alpha_\epsilon > 0)(\forall x \in I \cap]a - \alpha_\epsilon, a + \alpha_\epsilon[) \quad f(x) > A$$

Propriété 7 *Dans les condition précédentes :*

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty \text{ quand } f(a+h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

On suppose ici que $+\infty$ est une borne de I.

Définition 5 *On dit que la fonction f* ***tend vers*** *$+\infty$ ou* ***a la limite*** *$+\infty$ en $+\infty$ et on note :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

quand :

$$(\forall A > 0)(\exists B_A > 0)(\forall x \in I \cap]B_A, +\infty[) \quad f(x) \geq A$$

On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$ quand : $-f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Si $-\infty$ est une borne de I, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $-\infty$ quand : $f(-x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Si $-\infty$ est une borne de I, on dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ en $-\infty$ quand : $-f(-x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On a alors le théorème de minoration (à adapter aux différents cas de limites infinies)

Théorème 3 *Soit f, g des fonctions définies sur I avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$ une borne de I telles que :*

$$(\forall x \in I) \quad f(x) \leq g(x)$$

Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ en a alors $g(x)$ aussi :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty \implies g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$$

1.4 Règles de calcul sur les limites

Le tableau suivant donne les règles de calcul des limites usuelles à partir des limites des fonctions f et g en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. FI (forme indéterminée) signifie qu'il n'y a pas de règle générale : tout est possible, il faut voir au cas par cas...

Suite	$f(x)$	$g(x)$	$f(x)+g(x)$	$f(x).g(x)$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$
Limite	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$l' \in \mathbb{R}_+^*$	$l + l'$	$l.l'$	$\dfrac{l}{l'}$
Limite	$l \in \mathbb{R}_+^*$	0	l	0	$\pm\infty$ en général
Limite	$l \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
Limite	0	0	0	0	FI "$\dfrac{0}{0}$"
Limite	0	$+\infty$	$+\infty$	FI "$0.\infty$"	0
Limite	$+\infty$	$+\infty$	∞	$+\infty$	FI "$\dfrac{\infty}{\infty}$"
Limite	$+\infty$	$-\infty$	FI"$\infty - \infty$"	$-\infty$	FI "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

Les formes indéterminées "$\infty - \infty$" se lèvent en factorisant le terme dominant. Les formes indéterminées "$\frac{\infty}{\infty}$" ou "$\frac{0}{0}$" se lèvent en utilisant les règles de comparaisons qui suivent (éventuellement après factorisation du terme dominant).

1.5 Limite à droite, limite à gauche

Soit f une fonction définie sur $I - \{a\}$ ou $a \in I$.

Définition 6 *On dit que la fonction f a la **limite** $l \in \overline{\mathbb{R}}$ **à gauche** (resp. **à doite**) en a quand $f_{/I\cap]-\infty,a[}$ (resp. $f_{/I\cap]a,+\infty[}$) a la limite l en a. On note alors :*

$$\lim_{x\to a, x<a} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to a-}{\longrightarrow} l \quad (\text{resp. } \lim_{x\to a, x>a} f(x) = l \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to a+}{\longrightarrow} l)$$

Une fonction admet une limite en un point a si elle y admet une limite à droite et à gauche et si de plus :

$$\lim_{x\to a, x<a} f(x) = \lim_{x\to a, x<a} f(x)$$

La limite de f étant la valeur commune.

Définition 7 *On dit que la fonction f est **continue à gauche** (resp. **à doite**) en a quand*

$$\lim_{x\to a, x<a} f(x) = f(a) \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to a-}{\longrightarrow} f(a) \quad \text{resp. } \lim_{x\to a, x>a} f(x) = f(a) \quad \text{ou} \quad f(x) \underset{x\to a+}{\longrightarrow} f(a)$$

Propriété 8 *La fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a.*

Les résultats vus sur les limites se généralisent sans difficulté aux limites à droite et à gauche.

Théorème 4 (Théorème de la limite monotone pour les fonctions.) *On suppose f monotone (non nécessairement continue) sur I intervalle de $\mathbb{R}$.*
Si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est une borne de I, alors f admet en a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Si $a \in \mathbb{R}$ est un point de I, alors f admet en a_- et en a_+ des limites dans $\mathbb{R}$.
Dans ce cas, f est continue en a si et seulement si ces limites sont égales.

2 Composition des limites

On s'intéresse ici au cas d'une fonction définie par composition.

Soit f et g 2 fonctions définies respectivement sur I et sur J telles que la composition $g \circ f$ soit définie sur I.

Théorème 5 (Composition des limites) *On suppose :*

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \quad (a,b) \in \overline{\mathbb{R}}$$

et :

$$g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} l \quad (l \in \overline{\mathbb{R}})$$

alors

$$g(f(x)) = g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$$

On peut aussi composer suites et fonctions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et b un point ou une borne de I.

Théorème 6 (Caractérisation séquentielle de la limite)

$$f(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} l \quad (l \in \overline{\mathbb{R}})$$

si et seulement si on a la propriété suivante :
Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(v_n = f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$$

alors

$$v_n = f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$$

2.1 Quelques limites classiques

On donne quelques limites souvent utiles qui seront revues dans le chapitre **Etude asymptotique**

Fonctions $\exp$ **et** $\ln$

$$\frac{\exp(x)-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

$$\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{x}{\exp(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

Fonctions trigonométriques

$$\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$
$$\frac{\tan(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$
$$\frac{\sinh(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$
$$\frac{\tanh(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$
$$\frac{\arcsin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$
$$\frac{\arctan(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

3 Fonctions continues

On considère ici un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction réelle f définie sur I.

Définition 8 *f est continue en $a \in I$ si on a :*

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$$

*On dit que f est **continue sur** I quand elle est continue en tout point de I.*

On note $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.
Notons que la restriction d'une fonction continue est aussi continue.

Pour aller dans l'autre sens, on parle de **prolongement par continuité** :

Propriété 9 *Si la fonction f est définie et continue sur $I - \{a\}$ ($a \in I$ ou a une borne de I) et que f a une limite finie l en a alors la fonction F obtenue en prolongeant f par :*

$$F \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \to \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq a \\ F(a) = l \text{ si } x = a \end{cases} \end{cases}$$

est continue sur I.
*F est le **prolongement par continuité** de f à I.*

Vu les propriétés des limites, la somme et le produit de 2 fonctions continues ainsi que le produit d'une fonction continue par une constante sont des fonctions continues. On a :

Propriété 10 *L'ensemble $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues sur I est un espace vectoriel, plus précisément un sous espace de $\mathbb{R}^I$.*

D'après le théorème des limites composées, la composée de 2 fonctions continues est une fonction continue.

En particulier, les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}$. Les fonctions "classiques" c'est à dire obtenues par composition, produit, quotient à partir des fonctions puissances, exponentielles et logarithmes sont continues sur les intervalles contenus dans leurs domaines de définition.

L'intérêt de la notion de continuité réside dans les résultats suivants.

Théorème 7 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b 2 points de I.*

Si M appartient à l'intervalle $[f(a), f(b)]$ (on dit alors que M est une ***valeur intermédiare****), alors il existe $m \in [a, b]$ tel que :*

$$f(m) = M$$

Dit autrement : toutes les valeurs intermédiaires d'une fonction continue sont atteintes.

Si de plus la fonction f est strictement monotone sur I alors un tel point m est unique dans I :

$$(\exists!\ m \in I) \quad f(m) = M$$

On obtient comme corolaire le résultat qui suit :

Théorème 8 (Image d'un intervalle par une fonction continue) *Si f une fonction continue sur un intervalle I, alors son image $f(I)$ est un intervalle.*

Si l'intervalle est un segment :

Théorème 9 (Image d'un segment par une fonction continue) *Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ (a et b réels), alors son image $f(I)$ est un segment :*

$$f([a, b]) = [\mathrm{Min}_I(f) = f(m_1), \mathrm{Max}_I(I) = f(m_2)]$$

où m_1 et m_2 sont 2 points de $[a, b]$.

En particulier, une fonction continue sur un segment atteint ses bornes.

Si de plus la fonction f est monotone, on a :

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

Les fonctions strictement monotones jouent un rôle particulier ici.

Propriété 11 *Une fonction continue et injective est strictement monotone.*

Théorème 10 (Théorème de la bijection) *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert $]a, b[$, a et b dans $\mathbb{R} \cup \pm\infty$ (énoncé à adapter aux autres cas). On note l_a et l_b ses limites respectivement en a et b.*

f définit alors une bijection de I sur son image $f(I) =]l_a, l_b[$.
Sa fonction réciproque :

$$f^{-1} \begin{cases}]l_a, l_b[\to]a, b[\\ y \to x \text{ tel que } \quad f(x) = y \end{cases}$$

est aussi continue et a même monotonie que f.

Les courbes représentatives de f de f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice.

4 Fonctions complexes

On considère ici une f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs complexes :

$$f \begin{cases} I \to \mathbb{C} \\ x \to f(x) \end{cases}$$

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point de ou une borne de I.

Définition 9 *On dit que f a la limite $l \in \mathbb{C}$ quand x tend vers a quand une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :*

- $\mathrm{Re}(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(l)$ *et* $\mathrm{Im}(f(x)) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(l)$,
- $|f(x) - l| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

En conséquence, une fonction complexe est continue sur un intervalle si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont.

Les propriétés algébriques (somme, produit ...) des limites finies et la notion de continuité se généralisent sans difficultés aux fonctions complexes. Notons cependant que la notion $f(x) \to +\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires n'ont pas de sens dans $\mathbb{C}$. Par contre, on peut avoir $|f(x)| \to +\infty$.

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoir

Définition des différents types de limites. Propriétés élémentaires, calculs de limites simples. Théorèmes sur les fonctions continues

Savoir faire

Études de fonctions simples.