Fiche 45 : Continuité : les grands classiques.

Exercice 1

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 = 1$.
Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 2

1. Montrer que si $f : [0,1] \to [0,1]$ est continue alors il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$. Un tel point est dit *fixe*.
2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sans point fixe.

Exercice 3

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions du problème P suivant :

$f(1) = 1$

Si $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(x \times y) = f(x) \times f(y) \end{cases}$

On pourra commencer par montrer que f est croissante

Exercice 4

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ solutions du problème Q suivant :

$f(1) = 1$
Si x est réel alors $f(x)$ aussi.
Si $z \in \mathbb{C}$, $z' \in \mathbb{C}$ $\begin{cases} f(z+z') = f(z) + f(z') \\ f(z \times z') = f(z) \times f(z') \end{cases}$

Exercice 5

Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ ayant au moins une période $T > 0$ (on dit dans ce cas f est **périodique**).

1. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une période T_n de f avec $0 < T_n < \frac{1}{n}$, alors f est constante.
   On suppose pour la suite que f n'est pas constante
2. Montrer qu'on peut poser $T_{Min} = \mathrm{Min}(\{T > 0/T \text{ est une période de } f\})$
3. Montrer que T_{Min} est *la* période de f, c'est à dire que tout autre période T de f est un multiple entier de T_{Min}.dd
4. Quel est l'ensemble des périodes de la fonction $1_{\mathbb{Q}}$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Que peut-on dire de f' si on sait que f est paire ? impaire ? périodique ?
2. Que peut-on dire de f si on sait que f' est paire ? impaire ? périodique ?
3. Montrer que si f' est T-périodique et $f(T) = f(0)$ alors f est périodique.