Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 27-01.

DM 3 pour le 10/02 : Bases des espaces de polynômes.

Exercice 1

On considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$(\Delta P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

On pose, $H_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $H_n = \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$.

1. Montrer que si $n \geq 1$: $\begin{cases} \Delta(H_n) = H_{n-1}, \\ H_n(0) = 0, \\ \forall k \in \mathbb{Z} \ : \ H_n(k) \in \mathbb{Z} \end{cases}$
2. Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit P de degré p. Montrer que P peut s'écrire
$$P = \sum_{n=0}^{p} (\Delta^n P)(0) H_n.$$
On pourra commencer par considérer le cas de H_p
4. En déduire que, pour tout polynôme P de degré p, les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) P prend des valeurs entières (relatives) sur $\mathbb{Z}$.
   (b) P prend des valeurs entières (relatives) sur $\{0, \ldots, p\}$.
   (c) Les coordonnées de P dans la base $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des entiers relatifs.

Exercice 2 (facultatif)

Exercice 1

Si a est réel strictement positif, on pose

$$a\mathbb{Z} = \{na/n \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $a\mathbb{Z}$ est un sous groupe de $\mathbb{R}$ et c'est le plus petit sous groupe de $\mathbb{R}$ contenant a c'est à dire que tout sous groupe de $\mathbb{R}$ qui contient a, contient $a\mathbb{Z}$ comme sous groupe.
*Un sous groupe de $\mathbb{R}$ du type $a\mathbb{Z}$ est dit **monogène** et a est dit générateur de $a\mathbb{Z}$.*
2. Montrer que $6\mathbb{Z} + 4\mathbb{Z} = \{n6 + m4/(n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous groupe monogène de $\mathbb{R}$ et en donner un générateur.
3. Montrer que $\sqrt{2}\mathbb{Z} + \sqrt{3}\mathbb{Z} = \{n\sqrt{2} + m\sqrt{3}/(n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous groupe de $\mathbb{R}$ qui n'est pas monogène.