

Fiche 46 : Fonctions continues.

Exercice 1

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe c dans $[0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et $\lim_{-\infty} f = 0$; $\lim_{+\infty} f = 0$.

Montrer que f est bornée et possède un maximum.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2x)$. Montrer que f est constante.

Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ continue non constante telle que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = f(2x)$.

Exercice 4

Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non constante telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2).$$

On suppose f continue en 0 et en 1, montrer que f est constante.

Exercice 5

Calculer la fonction dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ des fonctions définies par :

$$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{1-x^2}$$