Fiche 47 : Td du 30/01.

Exercice 1

Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes (n et m sont des entiers naturels non nuls).

$a)$ $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2\,|x|}{x}$ $b)$ $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2\,|x|}{x}$ $c)$ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3\,x+2}$

$d)$ $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ $e)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ $f)$ $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

$g)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ $h)$ $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$ $g)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$

Exercice 2

On rappelle les limites : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.
Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}.\sin(\frac{1}{\sqrt{x}})$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(2x)}{x^2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\tan(x)}{\cos^2(x)-1}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{\sin^3(\frac{x}{2})}$

Exercice 3

Étudier l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Exercice 4

Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Etudier la fonction et justifier qu'elle définit une bijection.
2. Donner la formule définissant f^{-1}.