Fiche 48 : Fonctions dérivables.

Exercice 1

La fonction $x \to \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable en 0^+ ?

Exercice 2

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples. Montrer qu'il en est de même de P'.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il en est de même de P'.
   On pourra utiliser le théorème de Rolle

Exercice 3

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, 2 fois dérivable sur $]a, b[$ et tel que si $x \in]a, b[$: $f''(x) \geq 0$ (*autrement dit, f est une fonction **convexe***).

1. Montrer que si $f(a) = f(b) = 0$ alors $f \leq 0$ sur $[a, b]$.
2. Montrer plus généralement que pour $t \in [0, 1]$: $f(ta + (1 - t)b) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$.
   Comment cela se "voit"-t-il sur le graphique de f ?

Exercice 4

Dans l'application de l'égalité des accroissements finis à la fonction

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

sur l'intervalle $[a, b]$ (a et b réels), on montre qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Préciser le nombre c de $]a, b[$.

Donner une interprétation géométrique.

Exercice 5

On s'intéresse à la réciproque de l'exercice précédent.
On considère une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout a et b réels :

$$f(b) - f(a) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b - a)$$

Montrer que pour tout a et b réels : $f''(a) = f''(b)$ et en déduire que f est une fonction polynômiale de degré au plus 2.

Exercice 6

Pour n entier naturel non nul donné, on pose $L_n = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
2. En étudiant le polynôme $A_n = (X^2 - 1)^n$, montrer que L_n admet n racines réelles simples et toutes dans $] - 1; 1[$.