Fiche 51 : Applications linéaires.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f la fonction prolongée.
Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 2

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications linéaires sur $\mathbb{R}[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, donner l'image et le noyau des applications qui sont linéaires :

$$P \mapsto P(0), \quad P \mapsto P(1) - 1, \quad P \mapsto P'(3), \quad P \mapsto (P'(2))^2, \quad P \mapsto \int_0^1 P(t)dt.$$

Exercice 3

Soit l'application $f\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x + y - 2z \\ x + 3y - z \end{pmatrix}$$

1. Justifier que f est linéaire.
2. (a) Déterminer une base et la dimension du noyau de f, noté $\ker f$.
   (b) L'application f est-elle injective ?
3. (a) Donner le rang de f et une base de $\mathrm{Im} f$.
   (b) L'application f est-elle surjective ?

Exercice 4

1. Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :
   $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   Calculer $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ et $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$ en général.
2. Déterminer $\mathrm{Ker} f$. En fournir une base. Donner un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à $\mathrm{Im} f$.