Fiche 51 : Applications linéaires.

Exercice 1

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications linéaires sur $\mathbb{R}[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, donner l'image et le noyau des applications qui sont linéaires :

$$P \mapsto P(0), \quad P \mapsto P(1)-1, \quad P \mapsto P'(3), \quad P \mapsto (P'(2))^2, \quad P \mapsto \int_0^1 P(t)dt.$$

Exercice 2

Soit l'application $f\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ 2x+y-2z \\ x+3y-z \end{pmatrix}$$

1. Justifier que f est linéaire.
2. (a) Déterminer une base et la dimension du noyau de f, noté $\ker f$.
   (b) L'application f est-elle injective ?
3. (a) Donner le rang de f et une base de $\mathrm{Im} f$.
   (b) L'application f est-elle surjective ?

Exercice 3

1. Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :
   $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   Calculer $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ et $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$ en général.
2. Déterminer $\mathrm{Ker} f$. En fournir une base. Donner un supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à $\mathrm{Im} f$.

Exercice 4

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $z = x - y$ et D la droite d'équations $x = -y = z$, p la projection de R^3 sur P parallèlement à D, q la projection de R^3 sur D parallèlement à P.
Déterminer pour $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ quelconque, les coordonnes de $p(v)$.

Exercice 5

On considère l'application : $P : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{2y-x}{3} \\ \frac{4y-2x}{3} \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Montrer que P est un projecteur et identifier ses espaces propres : $\mathrm{Im}(P)$ et $\mathrm{Ker}(P)$.

Exercice 6

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\begin{cases} f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3 \\ f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3 \\ f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une symétrie de $\mathbb{R}^3$.
2. Identifier les espaces propres associés c'est à dire les espaces : $\mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\mathrm{Ker}(f + Id)$.

Exercice 7

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par :

$$\forall P \in E,\ \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$.

Exercice 8

On considère l'espace complexe $E = \mathbb{C}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ défini par

$$f : \begin{cases} e_1 \to e_2 \\ e_2 \to e_3 \\ e_3 \to e_1 \end{cases}$$

1. Montrer sans calcul que f est un automorphisme de $\mathbb{C}^3$ et déterminer f^2 et f^{-1}.
2. Déterminer $F = \ker(f - Id)$, $G = \ker(f - jId)$, $H = \ker(f - j^2 Id)$.
3. Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$ et donner une base adaptée à la somme précédente.