Fiche 52 : Td du 13-02-2025.

Exercice 1

On considère la suite (T_n) de polynômes donnés par : $T_0 = 1$, $T_1(X) = X$ et, si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_{n+1}(X) = 2X.T_n(X) - T_{n-1}(X)$$

1. Préciser $\deg(T_n)$ et le coefficient dominant de T_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ en justifiant proprement.
2. Montrer que si $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$
On pourra procéder par récurrence avec prédécesseur et utiliser la relation :
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\sin(b)$$
.

Pour la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Résoudre l'équation d'inconnue θ : $T_n(\cos(\theta)) = 0$.
4. En déduire que T_n a n racines réelles $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ qu'on écrira sous la forme $x_k = \cos(\theta_k)$, $\theta_k \in [0, \pi]$ à préciser, pour $k \in [\![1, n]\!]$.
5. Justifier que T_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ et écrire sa factorisation réelle.
6. En remarquant que, si $x \in [-1, 1]$: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, déterminer
$$\mathrm{Max}_{[-1,1]} |T_n|$$

On considère pour la suite Q un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
On pose
$$M = \mathrm{Max}_{[-1,1]} |Q|$$

7. L'objectif de cette question est de montrer que $M \geq 1$.
On suppose, par l'absurde, que $M < 1$ et on pose $P = T_n - Q$.
   (a) Montrer que $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   (b) Déterminer le signe de $P(\cos(k\pi/n))$ en fonction de $k \in \mathbb{N}$ et en déduire (on pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires) que P a au moins n racines distinctes 2 à 2 dans $[-1, 1]$.
   (c) Conclure
8. Montrer que si est un Q un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}, tel que $Q(1) = 1$ et $M = \mathrm{Max}_{[-1,1]} |Q| = 1$ alors $Q = P_n$.
On pourra, comme dans la question précédente, considérer $P = T_n - Q$

Exercice 2

On considère la fonction $f(x)$ définie pour $x \in]-\pi, \pi[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dv}{\cos(v/2)}$$

1. Montrer que f est bien définie et dérivable sur l'intervalle proposé et calculer $f'(x)$ pour x dans cet intervalle.
2. Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$ et impaire.
3. Faire le changement de variable $t = \sin(v/2)$ dans l'intégrale et en déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
4. Donner alors le tableau de variations de f et en déduire qu'elle définit une bijection de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}$ à réciproque dérivable.

   On note g sa réciproque (*dont on ne cherchera pas d'expression explicite*). Rappelons que dans ces conditions, si $x \in]-\pi, \pi[$ et $y \in \mathbb{R}$ alors $y = f(x)$ est équivalent à $x = g(y)$. On rappelle aussi que, toujours dans ces conditions g est dérivable en y et : $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$.
5. Montrer que si $y \in \mathbb{R}$: $g'(y) = 2\cos\left(\frac{g(y)}{2}\right)$. Calculer $g(0)$, $g'(0)$ et $g''(y)$ pour $y \in \mathbb{R}$.
6. Montrer que g vérifie, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la relation : $g''(y) + \sin(g(y)) = 0$.