Chapitres 16 : Matrices.

Plan

Quelques rappels généraux d'algèbre linéaire

Dans tout ce chapitre, on fixe $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, tous de dimensions finies.

Soit E est un espace vectoriel de dimension p et $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.

Si v est un vecteur de E alors on peut écrire de façon unique : $v = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$. Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les coordonnées de v dans la base B.

Propriété 1 *Si E et F sont des espaces vectoriels, E de dimension finie, $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $(f_1, \dots, f_p)$ une famille de F, alors il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$:*

$$u(e_i) = f_i$$

On pose : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des tableaux à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \left\{ M = [\lambda_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} / \ \forall_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \ \lambda_{ij} \in \mathbb{K} \right\}$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des tableaux à n lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \{ M = [\lambda_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n} / \ \forall \ 1 \leq i, j \leq n \ \lambda_{ij} \in \mathbb{K} \}$$

Pour la multiplication par les constantes et l'addition termes à termes, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension $n \times p$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension n^2.

1 Définitions des matrices

1.1 Matrice colonne d'un vecteur

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$.

Définition 1 *Soit $v \in E$. On peut écrire $v = \lambda_1.e_1 + \cdots + \lambda_n.e_n$. On pose alors :*

$$X = \mathrm{Mat}_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

*$X \in \mathbb{K}^n$ est la **matrice colonne** ou le **vecteur colonne** représentant le vecteur v dans la base B.*

Théorème 1 *On considère E un espace de dimension n, B une base.*

L'application :

$$\mathrm{Mat}_B \begin{cases} E \to \mathbb{K}^n \\ v \to \mathrm{Mat}_B(v) \end{cases}$$

qui à tout vecteur de E associe le vecteur colonne qui le représente dans la base B définit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E et $\mathbb{K}^n$.

En particulier, notons que si v et w sont deux vecteurs de E et λ un scalaire :

$$\mathrm{Mat}_B(v + w) = \mathrm{Mat}_B(v) + \mathrm{Mat}_B(w)$$
$$\mathrm{Mat}_B(\lambda v) = \lambda \,\mathrm{Mat}_B(v)$$

Remarquons que le résultat précédent dans le cas de $\mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique consiste à remarquer que si $v \in \mathbb{K}^n$: $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(v) = v$...

1.2 Matrice d'une application linéaire

On considère E un espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_p)$ et F un autre espace vectoriel muni d'une base $C = (f_1, \dots, f_n)$.

Soit u une application linéaire de E dans F. On peut écrire :

$$\begin{aligned} u(e_1) &= \lambda_{11} f_1 + \cdots + \lambda_{i1} f_i + \cdots + \lambda_{n1} f_n \\ &\vdots \\ u(e_j) &= \lambda_{1j} f_1 + \cdots + \lambda_{ij} f_i + \cdots + \lambda_{nj} f_n \\ &\vdots \\ u(e_p) &= \lambda_{1p} f_1 + \cdots + \lambda_{ip} f_i + \cdots + \lambda_{np} f_n \end{aligned}$$

Les nombres (λ_{ij}) déterminent complètement l'application u.

Définition 2 *Dans les conditions précédentes, $M = [\lambda_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est la* ***matrice*** *dans les bases B et C de l'application linéaire u. On note :*

$$M = \mathrm{Mat}_{B,C}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1j} & \dots & \lambda_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i1} & \dots & \lambda_{ij} & \dots & \lambda_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nj} & \dots & \lambda_{np} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, la j-ième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{B,C}(u)$ est constituée par les coordonnées dans la base C (de F) de l'image par u du j-ième vecteur de la base B (de E).

Ainsi avec les notations précédentes :

$$M = \mathrm{Mat}_{B,C}(u) = \big(\mathrm{Mat}_C(u(e_1)) \quad \dots \quad \mathrm{Mat}_C(u(e_j)) \quad \dots \quad \mathrm{Mat}_C(u(e_p))\big)$$

Le fait que toute matrice représente une application et une seule entraine :

Théorème 2 *Dans les condition précédentes l'application :*

$$\mathrm{Mat}_{B,C} \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u \mapsto \mathrm{Mat}_{B,C}(u) \end{cases}$$

qui à toute application linéaire entre E et F associe sa matrice dans les bases B et C définit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

En particulier, notons que si u et v sont des applications linéaires et λ un scalaire :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{B,C}(u+v) &= \mathrm{Mat}_{B,C}(u) + \mathrm{Mat}_{B,C}(v) \\ \mathrm{Mat}_{B,C}(\lambda u) &= \lambda \,\mathrm{Mat}_{B,C}(u) \end{aligned}$$

Dans le cas où l'espace E est $\mathbb{K}^p$ et l'espace F est $\mathbb{K}^n$ et que les bases choisies sont les bases canoniques, on obtient :

Définition 3 *Si u est une application linéaire entre $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$, en reportant dans la j-ième colonne les coordonnées de $u(e_j)$ (e_j : j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^p$), on construit la* ***matrice canoniquement associée*** *à $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ souvent notée $\mathrm{Mat}(u)$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(u)$.*

Les résultats précédents montrent :

Propriété 2 *L'application :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}} \begin{cases} \mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n) \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(u) \end{cases}$$

qui à toute application linéaire entre $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ associe sa matrice canonique définit un isomorphisme d'espaces vectoriels dit canonique entre $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1.3 Matrice d'un endomorphisme

Dans le cas d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ d'un espace E de dimension finie muni d'une base, la situation précédente est souvent simplifiée par le fait qu'on choisit la même base au départ et à l'arrivée. Cela ne sera cependant pas toujours le cas (se reporter alors au chapitre précédent).

Définition 4 *La **matrice*** $\mathrm{Mat}_B(u)$ *dans la base* B *de l'endomorphisme* u *est la matrice* $\mathrm{Mat}_{B,B}(u)$.

Autrement dit, la j*-ième colonne de la matrice* $\mathrm{Mat}_B(u)$ *est constituée par les coordonnées dans la base* B *de l'image par* u *du* j*-ième vecteur de la base* B.

Le fait que toute matrice représente un endomorphisme et une seule entraine :

Théorème 3 *On considère* E *un espace de dimension* n, B *une base.*

L'application :

$$\mathrm{Mat}_B \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u \to \mathrm{Mat}_B(u) \end{cases}$$

qui à tout endomorphisme de E *associe sa matrice dans la base* B *définit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre* $\mathcal{L}(E)$ *et* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ainsi avec les notations précédentes :

$$M = \mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix}\mathrm{Mat}_B(u(e_1)) & \dots & \mathrm{Mat}_B(u(e_j)) & \dots & \mathrm{Mat}_B(u(e_n))\end{pmatrix}$$

En particulier, rappelons que si u et v sont des endomorphismes et λ un scalaire :

$$\mathrm{Mat}_B(u+v) = \mathrm{Mat}_B(u) + \mathrm{Mat}_B(v)$$
$$\mathrm{Mat}_B(\lambda v) = \lambda \, \mathrm{Mat}_B(v)$$

On note

$$I_n = [\delta_{i,j}]_{1 \le i,k \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

I_n est la matrice **identité** d'ordre n. Indépendamment de la base B choisie de E :

$$I_n = \mathrm{Mat}_B(Id_E)$$

Une matrice proportionnelle à la matrice I_n est dite **scalaire**. Les matrices scalaires forment une droite vectorielle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Multiplication des matrices

2.1 Matrices d'endomorphismes

Dans les espaces $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E)$, on sait que la "multiplication" est donnée par la composition des applications linéaires.

Théorème 4 (Multiplication des matrices, formule du produit lignes-colonnes) *Soit* E *un espace vectoriel muni d'une base* B *et* u, v *des endomorphismes de* E. *On suppose* $P = \mathrm{Mat}_B(v)$, $Q = \mathrm{Mat}_B(u)$. *On peut alors poser :*

$$P.Q = \mathrm{Mat}_B(v \circ u)$$

Autrement dit :

$$\mathrm{Mat}_B(v).\mathrm{Mat}_B(u) = \mathrm{Mat}_B(v \circ u)$$

P.Q est ici le produit des matrices M et N. Si M et N sont carrées d'ordre n alors P.Q aussi. De plus, si n est un entier naturel :

$$\mathrm{Mat}_B(v^n) = (\mathrm{Mat}_B(v))^n$$

Dans les conditions précédentes, si $P = [p_{ik}]_{1\leq i,k\leq n}$ et $Q = [q_{kj}]_{1\leq k,j\leq n}$ alors

$$P.Q = [p_{ik}]_{1\leq i,k\leq n}.[q_{kj}]_{1\leq k,j\leq n} = \left[\sum_{1\leq k\leq n} p_{ik}.q_{kj}\right]_{1\leq i,j\leq n}$$

2.2 Matrices d'applications linéaires

Théorème 5 *Soit E un espace vectoriel muni d'une base B (dim$(E) = m$), F un espace vectoriel muni d'une base C (dim$(F) = p$), G un espace vectoriel muni d'une base D (dim$(E) = n$). Soit aussi : $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$, $v \circ u \in \mathcal{L}(E,G)$. On suppose $S = \mathrm{Mat}_{B,C}(u)$, $R = \mathrm{Mat}_{C,D}(v)$. On peut alors poser :*

$$R.S = \mathrm{Mat}_{B,D}(v \circ u)$$

Autrement dit :

$$\mathrm{Mat}_{C,D}(v).\mathrm{Mat}_{B,C}(u) = \mathrm{Mat}_{B,D}(v \circ u)$$

R.S est le ici le produit des matrices M et N.

Dans les conditions précédentes, si $R = [r_{ik}]_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq k\leq p}}$ et $S = [s_{kj}]_{\substack{1\leq k\leq p\\1\leq j\leq m}}$ alors

$$R.S = [r_{ik}]_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq k\leq p}}.[s_{kj}]_{\substack{1\leq k\leq p\\1\leq j\leq m}} = \left[\sum_{1\leq k\leq p} r_{ik}.s_{kl}\right]_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$$

Rappelons qu'un vecteur peut être représenté par une matrice colonne ce qui permet de définir le produit d'une matrice et d'un vecteur et ainsi pour l'action des matrices sur les vecteurs :

Théorème 6 *Soit E un espace vectoriel muni d'une base B, $u \in \mathcal{L}(E)$, $v \in E$. On suppose $M = \mathrm{Mat}_B(u)$, $X = \mathrm{Mat}_B(v)$. On a alors :*

$$\mathrm{Mat}_B(u(v)) = \mathrm{Mat}_B(u).\mathrm{Mat}_B(v)$$

Si $Y = \mathrm{Mat}_B(u(v))$ alors :

$$Y = M.X$$

Notons que le produit $M.X$ est formé d'une colonne.

Pour les applications linéaires en général :

Théorème 7 *Soit E un espace vectoriel muni d'une base B, F un espace vectoriel muni d'une base C. Soit aussi : $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in E$. On suppose $M = \mathrm{Mat}_{B,C}(u)$, $X = \mathrm{Mat}_B(v)$, $Y = \mathrm{Mat}_C(u(v))$. On a alors :*

$$\mathrm{Mat}_C(u(v)) = \mathrm{Mat}_{B,C}(u) \cdot \mathrm{Mat}_B(v) \qquad Y = M.X$$

3 Calculs dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrices inversibles.

3.1 Les anneaux $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E)$

Rappelons que si E est un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel et un anneau (non commutatif si $\dim(E) \geq 2$) dont le produit est donné par la composition des endomorphismes et dont l'élément neutre est l'identité.

Muni du produit lignes colonnes défini plus haut : si $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et un anneau (non commutatif si $n \geq 2$) dont l'élément neutre est I_n.

Ainsi on a les règles : si M, N, P sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- $(M + N).P = M.P + N.P$
- $M.(N + P) = M.N + M.P$

Les identités géométriques et du binôme s'appliquent à 2 éléments qui **commutent**.

Propriété 3 *Si E est un espace vectoriel muni d'une base B alors :*

$$\mathrm{Mat}_B(Id_E) = I_n$$

Attention, si B et B' sont 2 bases différentes d'un espace E alors $\mathrm{Mat}_{B,B'}(Id_E)$ n'est pas la matrice I_n.

On a même :

Théorème 8 *Si E est un espace vectoriel muni d'une base B alors :*

$$\mathrm{Mat}_B \begin{cases} \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u \to \mathrm{Mat}_B(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux unitaires.

Les matrices **scalaires** (proportionnelles à I_n) forment un sous anneau commutatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et même, tout matrice scalaire commute avec toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$.

3.2 Matrices particulières

On fixe toujours n un entier naturel.

Une matrice M est dite **diagonale** quand tout ses termes sont nuls sauf éventuellement ceux situés sur la diagonale, autrement dit une matrice diagonale est de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

Une matrice M est dite **triangulaire supérieure** quand tout ses termes sont nuls sauf éventuellement ceux situés sur la diagonale, ou au dessus autrement dit une matrice triangulaire supérieure est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & t_{i,j} & \\ & & \lambda_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Les matrices triangulaires inférieures sont définies de manière analogue.

L'ensemble des matrices diagonales est un sous anneau commutatif de (l'anneau) $\mathcal{M}_n(K)$.

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures et l'ensemble des matrices triangulaires inférieures sont des sous anneaux non commutatifs de (l'anneau) $\mathcal{M}_n(K)$.

L'ensemble des matrices diagonales est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(K)$.

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures et l'ensemble des matrices triangulaires inférieures sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(K)$.

Ces différents types de matrices sont particulièrement intéressants car ils se multiplient facilement (les différents coefficients sont dans $\mathbb{K}$) :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda'_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1.\lambda'_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda_i.\lambda'_1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n.\lambda'_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & t_{i,j} & \\ & & \lambda_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda'_1 & & & & \\ & \ddots & & t'_{i,j} & \\ & & \lambda'_i & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1.\lambda'_1 & & & & \\ & \ddots & & t"_{i,j} & \\ & & \lambda_i.\lambda'_1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n.\lambda'_1 \end{pmatrix}$$

3.3 Matrices inversibles

Propriété 4 *Soit E un espace de dimension n, B une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. La matrice* $\mathrm{Mat}_B(u)$ *est inversible si et seulement si u est un automorphisme et, dans ce cas :*

$$\mathrm{Mat}_B(u^{-1}) = (\mathrm{Mat}_B(u))^{-1}$$

Le lien avec les applications linéaires est donné par :

Propriété 5 *Soit E un espace vectoriel, B une base de E, F un espace vectoriel, C une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice* $\mathrm{Mat}_{B,C}(u)$ *(carrée dans ce cas) est inversible si et seulement si u est un isomorphisme entre E et F (dans cas :*$\dim(E) = \dim(F)$*) et, dans ce cas :*

$$\mathrm{Mat}_{C,B}(u^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{B,C}(u))^{-1}$$

En termes de systèmes :

Propriété 6 *La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si une des conditions équivalentes suivantes est réalisée :*

- *Pour tout vecteur colonne $B \in \mathbb{K}^n$, le système d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$: $AX = B$ a une et une seule solution.*
- *Le système d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$: $AX = 0_n$ a une et une seule solution : $X = 0_n$.*
- *Le système d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$: $AX = 0_n$ a n pivots.*
- *La matrice A est de rang n.*

Dans le cas où A est inversible, le calcul de A^{-1} se pratique à l'aide du pivot de Gauss et en interprétant le calcul sous la forme :

$$A.X = B \iff X = A^{-1}.B$$

En fait, via la théorème du rang, on montre :

Propriété 7 *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M.N = I_n$ ou $N.M = I_n$ alors les 2 égalités sont réalisées et les matrices M et N sont inversibles inverses l'une de l'autre.*

Du coup le cas des matrices diagonales est immédiat :

Propriété 8 *Si la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale, elle est inversible si et seulement si les éléments $(a_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ sur sa diagonale sont non nuls et dans ce cas A^{-1} est la matrice diagonale ayant sur sa diagonale les valeurs $(a_{ii}^{-1})_{1 \leq i \leq n}$.*

Le cas des matrices triangulaires :

Propriété 9 *Si la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure (resp. inférieure), elle est inversible si et seulement si les éléments $(a_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ sur sa diagonale sont non nuls et dans ce cas A^{-1} est triangulaire supérieure (resp. inférieure) et a sur sa diagonale les valeurs $(a_{ii}^{-1})_{1 \leq i \leq n}$.*

Concernant les propriétés algébriques de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on obtient :

Théorème 9 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *est un groupe (multiplicatif) d'élément neutre I_n, appelé **groupe linéaire d'ordre** n. En particulier, le produit de 2 matrices M et N inversibles est inversible et, de plus :*

$$(M.N)^{-1} = N^{-1}.M^{-1}$$
$$(M^{-1})^{-1} = M$$

L'ensemble des matrices diagonales (resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires inférieures) inversibles autrement dit à éléments diagonaux non nuls forme un sous groupe du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Les matrices inversibles sont sans effet sur le rang, autrement dit :

Propriété 10 *Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ sont toutes deux inversibles alors les matrices A, $P.A$, $A.Q$, $P.A.Q$ ont le même rang.*

4 Bases canoniques des espaces $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

On fixe n et p deux entiers.

4.1 Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Pour i et j dans $[\![1, n]\!]$, on pose $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en i-ème ligne et j-ième colonne qui est un 1, ainsi :

$$E_{i,j} = [\delta_{i,k}\delta_{j,l}]_{1 \leq k,l \leq n}$$

On obtient assez vite :

Propriété 11 *La famille $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ (de cardinal n^2) est une base de l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dite* ***base canonique****.*

On observe que si i, j, k et l sont dans $[\![1, n]\!]$ alors

$$E_{ij}.E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$$

Si $A = [\lambda_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :

$$A = \sum_{1\leq i,j\leq n} \lambda_{i,j}E_{i,j}$$

Ainsi, si E est de dimension n les espaces $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, isomorphes, sont de dimension n^2.

L'espace des matrices scalaire est de dimension 1 et a pour base la matrice I_n.
L'espace des matrices diagonales est de dimension n et a pour base la famille $(E_{i,i})_{i\in\{1,\dots,n\}}$.
L'espace des matrices triangulaires supérieures est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et a pour base la famille $(E_{i,j})_{\{1\leq i\leq j\leq n\}}$.

4.2 Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Pour i dans $[\![1, n]\!]$ et j dans $[\![1, p]\!]$, on pose $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en i-ème ligne et j-ième colonne qui est un 1. Ainsi :

$$E_{i,j} = [\delta_{i,k}\delta_{j,l}]_{1\leq k\leq n;1\leq l\leq p}$$

Propriété 12 *La famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq p}$ (de cardinal $n \times p$) est une base de l'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dite* ***base canonique****.*

Si $A = [\lambda_{i,j}]_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors :

$$A = \sum_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p} \lambda_{i,j}E_{i,j}$$

Ainsi, E est de dimension p, F de dimension n, les espaces $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, isomorphes, sont de dimension $n \times p$.

5 Application canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice

Dans le cas des espaces canoniques munis de leurs bases canoniques :

Propriété 13 *Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, $v \in \mathbb{K}^p$. On a :*

$$u(v) = \mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(u).v$$

Notons que, dans ce cas, les colonnes de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}$ sont les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$ par u.

Inversement, si A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}$, on peut lui associer l'application, parfois notée A :

$$A : \begin{cases} \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n \\ X \to A.X \end{cases}$$

Cette application a pour matrice dans les bases canoniques justement la matrice A. On dit que c'est l'application **canoniquement associée à la matrice** A.

Du coup, par définition, le **rang**, l'**image**, le **noyau** d'une matrice sont ceux de l'application canoniquement associés.

Propriété 14 *Dans les conditions précédentes ($A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $X \in \mathbb{K}^p$), le vecteur $A.X$ est une combinaison linéaire des vecteurs colonnes de A.*

L'image de la matrice A est l'espace engendré par ses vecteurs colonnes.
Le rang de la matrice A est celui de la famille de ses vecteurs colonnes.

Le rang de la matrice A est aussi celui de la famille de ses vecteurs lignes (ceci est délicat à prouver).

Un lien important avec les systèmes est donné par :

Propriété 15 *Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, le rang de la matrice A est celui du système d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$: $A.X = 0$ (ou de tout système avec second membre associé).*

On peut remarquer que si A et B sont deux matrices telles que le produit $A.B$ est défini alors la j-ième colonne de $A.B$ est le produit de A par la j-ième colonne de B et que la i-ème ligne de $A.B$ est le produit de la i-ème ligne de A par B.

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}$: $M = [m_{i,j}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$.

Si on considère $I = \{i_1 < \cdots < i_{n'}\}$ une partie de $[\![1,n]\!]$ et $I = \{j_1 < \cdots < j_{m'}\}$ une partie de $[\![1,p]\!]$, on peut poser

$$N = [m_{i_k,j_l}]_{\substack{1 \leq k \leq n' \\ 1 \leq l \leq p'}}$$

La matrice $N \in \mathcal{M}_{n',p'}$ (carrée si $p' = n'$) est une matrice extraite de la matrice M.
On montre que dans ces conditions $\mathrm{rg}(N) \leq \mathrm{rg}(M)$. Plus précisément :

Théorème 10 *Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}$ alors il existe (au moins) une matrice carrée inversible N extraite de M et de rang maximal c'est à dire $\mathrm{rg}(N) = \mathrm{rg}(M)$.*

6 Changements de bases

6.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Soit E un espace vectoriel, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $F = (f_1, \dots, f_m)$ une famille de vecteurs de E.

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
f_1 &= \lambda_{11}e_1 + \dots + \lambda_{i1}e_i + \dots + \lambda_{n1}e_n \\
&\vdots \\
f_j &= \lambda_{1j}e_1 + \dots + \lambda_{ij}e_i + \dots + \lambda_{nj}e_n \\
&\vdots \\
f_m &= \lambda_{1m}e_1 + \dots + \lambda_{im}e_i + \dots + \lambda_{nm}e_n
\end{aligned}$$

Définition 5 *Dans les conditions précédentes, la matrice :* $M = [\lambda_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$ *(n lignes, m colonnes) est la* ***matrice*** *dans la base* B *de la famille* F*. On note :*

$$M = \mathrm{Mat}_B(F) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1j} & \dots & \lambda_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{i1} & \dots & \lambda_{ij} & \dots & \lambda_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nj} & \dots & \lambda_{nm} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, la j*-iéme colonne de la matrice* $\mathrm{Mat}_B(F)$ *est constituée par les coordonnées dans la base* B *du j-ième vecteur de la famille* F*.*

Propriété 16 *Le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de sa matrice dans une base donnée, autrement dit, avec les notations précédentes :*

$$\mathrm{rg}(F) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_B(F))$$

On admettra (c'est assez délicat à montrer) :

Propriété 17 *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}$*, le rang de la matrice* A *c'est à dire celui de l'espace engendré par ses colonnes est aussi celui de l'espace engendré par ses lignes.*

6.2 Matrice de passage

Théorème 11 *Soit* E *un espace vectoriel,* $B = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* E *et* $F = (f_1, \dots, f_n)$ *une famille de* n *vecteurs de* E*.*

La famille F *est une base de* E *si et seulement si la matrice* $\mathrm{Mat}_B(F)$ *est inversible autrement dit si elle est carrée et de rang égal à sa dimension.*

On introduit alors la notion de matrice de passage :

Définition 6 *Soit E un espace vectoriel, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $B' = (f_1, \dots, f_n)$ une autre base de E.*

La matrice $\mathrm{Mat}_B(B')$ aussi notée $P_{BB'}$ est appelée ***la matrice de passage*** *de la base B à la base B'. Sa j-ième colonne est formée par les coordonnées dans la base B du j-ième vecteur de la base B'.*

Remarquons :

Propriété 18 *$P_{BB'}$ est une matrice inversible : $P_{BB'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. En fait :*

$$P_{BB'} = \mathrm{Mat}_{B',B}(Id_E)$$

De plus,

$$P_{B'B} = (P_{BB'})^{-1}$$

Remarquons aussi que si B, B', B'' sont trois bases d'un même espace E alors :

$$P_{BB''} = P_{BB'}.P_{B'B''}$$

6.3 Changement de bases

On considère E un espace vectoriel B une base de E (en pratique "ancienne base") et B' une seconde base de E (en pratique "nouvelle base")

6.3.1 Pour un vecteur

En écrivant les coordonnées d'un vecteur $v \in E$ dans les bases B et B', on fait apparaitre les matrices colonnes $X = \mathrm{Mat}_B(v)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{B'}(v)$.

Propriété 19 *Dans les conditions précédentes :*

$$\mathrm{Mat}_{B'}(v) = P_{B'B}.\,\mathrm{Mat}_B(v) = (P_{BB'})^{-1}.\,\mathrm{Mat}_B(v)$$

Autrement dit :

$$X' = (P_{BB'})^{-1}.X$$

La relation précédente revient à écrire : $\mathrm{Mat}'_B(v) = \mathrm{Mat}_{B'}(Id_E(v)) = \mathrm{Mat}_{B,B'}(Id_E) \cdot \mathrm{Mat}_B(v)$.

En identifiant K^n et $\mathcal{M}_{n,1}$, on a :

Propriété 20 *L'application "changement de base" définie par :* $\begin{cases} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ X \to X' = P_{BB'}^{-1}.X \end{cases}$ *est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.*

6.3.2 Pour un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, lui sont associées les matrices carrées $M = \mathrm{Mat}_B(u)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{B'}(u)$.

Propriété 21 *Dans les conditions précédentes :*

$$\mathrm{Mat}_{B'}(u) = P_{B'B}.\,\mathrm{Mat}_B(u).P_{BB'} = (P_{BB'})^{-1}.\,\mathrm{Mat}_B(u).P_{BB'}$$

C'est à dire :

$$M' = (P_{BB'})^{-1} \cdot M \cdot P_{BB'}$$

La relation précédente revient à écrire :
$\mathrm{Mat}_{B'}(u) = \mathrm{Mat}_{B'}(Id \circ u \circ Id) = \mathrm{Mat}_{B,B'}(Id).\,\mathrm{Mat}_B(u).\,\mathrm{Mat}_{B',B}(Id)$.

Posons pour simplifier $P = P_{BB'}$, on a alors :

Propriété 22 *L'application "changement de base" définie par :*

$$\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \to M' = P^{-1} \cdot M \cdot P \end{cases}$$

est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec de plus pour le produit des propriétés du type (M et N sont des matrices carrées d'ordre n) :

$$(P^{-1} \cdot M \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot N \cdot P) = (P^{-1} \cdot (MN) \cdot P)$$

$$P^{-1} \cdot M^k \cdot P = (P^{-1} \cdot M \cdot P)^k$$

si k est un entier naturel.

On arrive à la notion de matrices **semblables** :

Propriété 23 *Soient A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, elles sont dites **semblables** quand il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que :*

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Dit plus concrètement : deux matrices sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans 2 bases différentes.

Propriété 24 *Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables ont même rang, du coup l'une est inversible si et seulement si l'autre l'est.*

6.3.3 Pour une application linéaire

On considère ici, de plus, un espace F et 2 bases C et C' de F.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, lui sont associées les matrices $M = \mathrm{Mat}_{B,C}(u)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{B',C'}(u)$.

Propriété 25 *Dans les conditions précédentes :*

$$\mathrm{Mat}_{B',C'}(u) = P_{C'C}.\,\mathrm{Mat}_{B,C}(v).P_{BB'} = (P_{CC'})^{-1} \cdot \mathrm{Mat}_{B,C}(v) \cdot P_{BB'}$$

C'est à dire :

$$M' = (P_{CC'})^{-1} \cdot M \cdot P_{BB'}$$

La relation précédente revient à écrire :
$\mathrm{Mat}_{B',C'}(u) = \mathrm{Mat}_{B',C'}(Id_F \circ u \circ Id_E) = \mathrm{Mat}_{C,C'}(Id_E) \cdot \mathrm{Mat}_{B,C}(u) \cdot \mathrm{Mat}_{B',B}(Id)$.
On arrive à la notion de matrices **équivalentes** :

Propriété 26 *Soient A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, elles sont dites* ***équivalentes*** *quand il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que :*

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot Q$$

Dit plus concrètement : deux matrices sont équivalentes si elles représentent la même application linéaire entre les espaces E et F avec des choix de bases de E et F différents.

On peut classer les matrices à équivalence prés.

On considère J_r la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ayant tous ses coefficients nuls sauf les r premiers coefficients sur la diagonale qui sont égaux à 1.

$$J_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

Théorème 12 *Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang. Une matrice de de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r est équivalente à la matrice J_r.*

7 Matrices par blocs

On considère une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On peut considérer $1 \leq n_1 \leq n-1$ et $1 \leq p_1 \leq p-1$ et écrire la matrice M sous la forme :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array}\right]$$

où $A \in \mathcal{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$,$B \in \mathcal{M}_{n_1,p-p_1}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-n_1,p-p_1}(\mathbb{K})$.

On dit qu'on a écrit la matrice M **par blocs** (ici 4, la notion peut se généraliser).
On considère 2 matrices M et N écrites par blocs :

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right] \quad N = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right]$$

de sorte que les matrices et leurs écritures par blocs soient multipliables c'est à dire ici que le nombre de colonnes de M (resp. A_1 et C_1, B_1 et D_1) soit égal au nombre de lignes de N (resp. A_2 et B_2, C_2 et D_2)

Théorème 13 *Dans les conditions précédentes :*

$$M.N = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right] . \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1.A_2 + B_1.C_2 & A_1.B_2 + B_1.D_2 \\ \hline C_1.A_2 + D_1.C_2 & C_1.B_2 + D_1.D_2 \end{array}\right]$$

Tous les produits apparaissant sont compatibles ...

8 Transposition

On considère n et p des entiers naturels non nuls.

Définition 7 *Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une matrice de l'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose*

$${}^tM = M^T = (m_{ji})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

*${}^tM = M^T$ est **la transposée** de la matrice M.*

L'application transposition :

$$T \begin{cases} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ M \to M^T \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, en particulier, si λ est un scalaire et si M et N sont dans l'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$${}^t(\lambda.M) = \lambda {}^tM \quad , \quad {}^t(M+N) = {}^tM + {}^tN$$

Concernant le produit, l'inversion, le rang :

Propriété 27 *Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,l}(\mathbb{K})$ alors :*

$${}^t(M.N) = {}^tN.{}^tM$$

Propriété 28 *Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors :*

$$\mathrm{rg}({}^tM) = \mathrm{rg}(M)$$

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors ${}^tM$ est inversible si et seulement si M l'est et dans ce cas :

$$({}^tM)^{-1} = {}^t(M)^{-1}$$

9 Trace

On fixe n un entier non nul.

Définition 8 *Si $M = [m_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose*

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$$

Le scalaire $\mathrm{tr}(M)$ est la **trace** de la matrice M, la somme des coefficients sur sa diagonale.
On a ainsi une forme linéaire :

$$\mathrm{tr}\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ M \to \mathrm{tr}(M) \end{cases}$$

En particulier, si λ est un scalaire et si M et N sont dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{tr}(\lambda.M) = \lambda\,\mathrm{tr}(M) \quad , \quad \mathrm{tr}(M+N) = \mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(N)$$

Concernant le produit, la transposition :

Propriété 29 *Si M et N sont dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :*

$$\mathrm{tr}(M.N) = \mathrm{tr}(N.M)$$

$$\mathrm{tr}({}^tM) = \mathrm{tr}(M)$$

Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{tr}(P^{-1}\cdot M \cdot P) = \mathrm{tr}(M)$$

On en déduit :

Théorème 14 *Deux matrices semblables dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont la même trace.*

On peut alors définir :

Définition 9 *Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n et si $M = \mathrm{Mat}_B(u)$ est sa matrice dans une base B quelconque de E, alors, on pose :*

$$\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}_B(u))$$

Le scalaire $\mathrm{tr}(u)$ est la **trace** de l'endomorphisme u.
Concernant le produit, la somme :

Propriété 30 *Si u et v sont dans l'espace $\mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors :*

$$\mathrm{tr}(u\circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u) \quad \mathrm{tr}(u+v) = \mathrm{tr}(u) + \mathrm{tr}(v) \quad \mathrm{tr}(\lambda u) = \lambda\,\mathrm{tr}(u)$$

Notons aussi que tr définit une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{L}(E)$.

Terminons en remarquant que $\mathrm{tr}(Id_E) = \dim(E)$ et que si p est un projecteur de E alors $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoirs

Définition d'une matrice, d'une matrice canonique, propriétés élémentaires des opérations sur les matrices : sommes, produits, inverses. Propriétés des espaces de matrices. Connaitre les formules de changements de bases.

Savoir-faire

Calculer et manipuler la matrice d'une application linéaire, calculer l'application associée à une matrice, calculer l'inverse d'une matrice, faire un produit de matrices, faire un changement de bases.