

Fiche 53 : Théorème du rang.

Exercice 1

Donner, si c'est possible, des exemples d'applications linéaires non nulles de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
2. $\text{Ker}(f)$ inclus strictement dans $\text{Im}(f)$.
3. $\text{Im}(f)$ inclus strictement dans $\text{Ker}(f)$.

Exercice 2

Donner, si c'est possible, des exemples d'applications linéaires non nulles de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

1. $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.
2. $\text{Ker}(f)$ inclus strictement dans $\text{Im}(f)$.
3. $\text{Im}(f)$ inclus strictement dans $\text{Ker}(f)$.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Montrer que $E = \ker(f - Id) \oplus \ker(f - 2Id)$.
3. Dédurre de 2. que si E est de dimension finie n , il existe une base $\beta = (\epsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$, telle que $\forall i, f(\epsilon_i) = \lambda_i \epsilon_i$ avec $\lambda_i = 1$ ou $\lambda_i = 2$.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes, et $f : E \rightarrow E$ définie par :

$$\forall P \in E, f(P)(X) = \frac{P(X) + P(-X)}{2}.$$

Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$, et que f est un projecteur dont on précisera les espaces propres.

Exercice 5

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes, et $f : E \rightarrow E$ définie par :

$$\forall P \in E, f(P)(X) = \frac{P(-X) - P(X)}{2}.$$

Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$, que $E = \text{Im}f \oplus \text{Ker}(f)$ mais que $f^2 = -f$.