Fiche 55 : Dualité.

Exercice 1

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ et les applications suivantes définies sur E :

$$\delta_0 : P \to P(0)\ ,\ \delta_0' : P \to P'(0)\ ,\ \delta_1 : P \to P(1)\ ,\ \delta_1' : P \to P'(1)$$

1. Rappeler les dimensions de E et de E'.
2. Montrer que δ_0 δ_0', δ_1, δ_1' est une base de E'.
3. Construire la base duale associée.
4. En déduire l'existence et l'expression, pour une fonction f dérivable sur $[0, 1]$ donnée, du spline cubique de f, c'est à dire d'un polynôme P de degré 3 tel que

$$P(0) = f(0), P(1) = f(1), P'(0) = f'(0), P'(1) = f'(1)$$

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel non nul. Soit λ un réel et p et q 2 projecteurs de E de même image F un sous espace de E. Montrer que $\lambda p + (1 - \lambda)q$ est un projecteur de E d'image F.

Exercice 3

Soit p et q 2 projecteurs de E.
Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $pq = qp = 0$.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel non nul. Soit f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E la famille $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 5

Soit E un espace de dimension finie. Trouver les endomorphismes (resp. automorphismes) de E qui commutent avec tous les endomorphismes (resp. automorphismes) de E.
Si $x \in E$, on pourra considérer le cas d'une symétrie par rapport à la droite engendrée par x et appliquer le résultats précédent.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$$

$$E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$$

$$\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$$

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$$