Modélisation des actions mécaniques

N. Mesnier
Lycée Jean Perrin, Lyon

2024–2025

Contexte & objectifs

Contexte

- les actions mécaniques sont au cœur des systèmes mécaniques ;
- elles permettent de les maintenir à l'équilibre ou de créer des mouvements ;
- leur modélisation est indispensable à leur dimensionnement ou leur étude.

Objectifs du cours

- acquérir les notions fondamentales de la modélisation des actions mécaniques ;
- savoir passer d'un point de vue local à un niveau global (intégration) ;
- connaître les torseurs des actions mécaniques transmissibles par les liaisons ;
- connaître et savoir utiliser les lois de frottement de Coulomb.

Plan du cours

1 2 3 4 5

Notions d'actions mécaniques

Définition (Action mécanique)

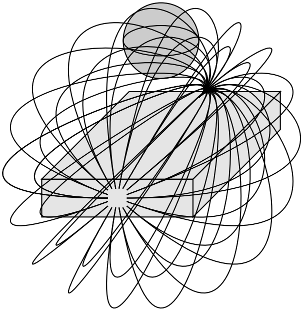
Une action mécanique est une interaction mécanique de type force, couple ou moment entre deux systèmes matériels définie par dualité avec la notion de mouvement dans un référentiel galiléen.

D'une façon générale, en milieu isotherme, on appelle action mécanique toute cause physique susceptible :

- de maintenir un corps au repos ;
- de créer, de maintenir ou de modifier le mouvement ;
- de déformer un corps.

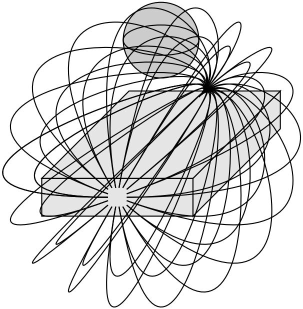
On peut par exemple recenser : le pied d'un footballeur qui frappe un ballon, les champs électriques et magnétiques qui deviennent un faisceau d'électrons, le rotor qui entraîne l'axe d'une turbine.

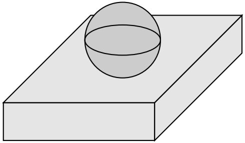
Classification des actions mécaniques



- **actions mécaniques à distance** (actions volumiques)
  appliquées sur l'ensemble des points d'un solide
  Exemples : champ de pesanteur, champ électrique ou champ magnétique.
- **actions mécaniques de contact** (actions surfaciques)
  appliquées sur une partie de la frontière du solide ∂S
  Exemples : contact dans les liaisons ou avec des solides extérieurs.

Classification des actions mécaniques





- **actions mécaniques à distance** (actions volumiques)
  appliquées sur l'ensemble des points d'un solide
  Exemples : champ de pesanteur, champ électrique ou champ magnétique.
- **actions mécaniques de contact** (actions surfaciques)
  appliquées sur une partie de la frontière du solide ∂S
  Exemples : contact dans les liaisons ou avec des solides extérieurs.

Ensemble isolé

Quand on a plusieurs solides en présence,
on peut définir un ensemble isolé.

Ensemble isolé = groupe de solides

$$\Sigma = \{1, 2, 5, \ldots, n\}$$

délimité par une frontière

surface extérieure $\partial\Sigma$

permettant de définir l'extérieur

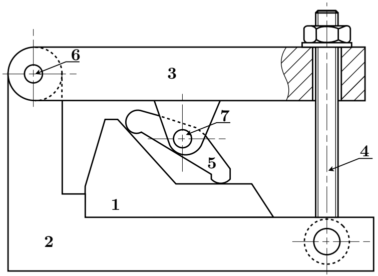
complémentaire dans l'univers matériel $\bar{\Sigma}$

On peut alors distinguer :

- les actions mécaniques extérieures exercées par des éléments de $\bar{\Sigma}$ sur Σ ;
- les actions mécaniques intérieures exercées entre des éléments de Σ.

Ensemble isolé

- Exemple : système de bridage



Ensemble isolé : $\Sigma = \{3, 5, 7\}$
Frontière de l'ensemble isolé : celle du groupe.
Actions mécaniques intérieures : $3 \rightarrow 7$ et $7 \rightarrow 5$
Actions mécaniques extérieures : $1 \rightarrow \Sigma$, $6 \rightarrow \Sigma$, $4 \rightarrow \Sigma$.

1 2 3 4 5

Modèles d'actions mécaniques

Modèles d'actions mécaniques

2 points de vue :

Modèle local

$\Rightarrow$ étude des actions mécaniques élémentaires en chacun des points d'un solide ou d'un système matériel et leurs effets en tout point de la zone où elles s'exercent
Utilisation : étude des pressions de contact, contraintes dans les matériaux, déformation du solide, etc.

Modèle global

construit par association de toutes les actions élémentaires sous forme de torseur d'actions mécaniques.
Utilisation : étude de l'équilibre ou du comportement dynamique d'un solide ou d'un système matériel dans un référentiel galiléen.

Ces deux approches ne sont pas équivalentes !

- Torseur des actions mécaniques

exercées par S_1 sur S_2 : $\{\mathscr{T}_{S_1 \to S_2}\}$

- Action réciproque (torseur = champ antisymétrique)

$$\{\mathscr{T}_{S_2 \to S_1}\} = -\{\mathscr{T}_{S_1 \to S_2}\}$$

- Éléments de réduction

$$\{\mathscr{T}_{S_1 \to S_2}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}} \\ \overrightarrow{M_{A,S_1 \to S_2}} \end{array} \right\} = {}_B\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}} \\ \overrightarrow{M_{A,S_1 \to S_2}} + \overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}} \wedge \overrightarrow{AB} \end{array} \right\}$$

résultante = effort (N) moment = moment (N·m)

- Formule de changement de point

$$\overrightarrow{M_{B,S_1 \to S_2}} = \overrightarrow{M_{A,S_1 \to S_2}} + \overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Torseur des actions mécaniques

Définition (Axe central)

L'axe central du torseur des actions mécaniques exercées par S_1 sur S_2 correspond à l'ensemble des points A où le moment du torseur est colinéaire à la résultante du torseur :

$$\overrightarrow{M_{A,S_1\rightarrow S_S}} \wedge \overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}} = \overrightarrow{0}$$

L'axe central n'existe que si la résultante est non nulle.

Théorème

L'ensemble des points A de l'axe central d'un torseur des actions mécaniques exercées par S_1 sur S_2 est défini à partir d'un point M quelconque par la relation :

$$\overrightarrow{MA} = \lambda\, \overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}} - \frac{\overrightarrow{M_{M,S_1\rightarrow S_2}} \wedge \overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}}}{\overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}} \cdot \overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}}}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Définition (Axe central)

L'axe central du torseur des actions mécaniques exercées par S_1 sur S_2 correspond à l'ensemble des points A où le moment du torseur est colinéaire à la résultante du torseur :

$$\overrightarrow{M_{A,S_1\rightarrow S_S}} \wedge \overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}} = \overrightarrow{0}$$

L'axe central n'existe que si la résultante est non nulle.

Théorème

L'ensemble des points A de l'axe central d'un torseur des actions mécaniques exercées par S_1 sur S_2 est défini à partir d'un point M quelconque par la relation :

$$\overrightarrow{MA} = \lambda \overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}} - \frac{\overrightarrow{M_{M,S_1\rightarrow S_2}} \wedge \overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}}}{\overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}} \cdot \overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}}}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Torseur des actions mécaniques

Cas général :

Les éléments de réduction d'un torseur d'actions mécaniques en un point quelconque le sont aussi. Par exemple, le torseur des actions mécaniques exercées par S_1 sur S_2 peut s'écrire en un point A :

$$\{\mathscr{T}_{S_1 \to S_2}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}} \\ \overrightarrow{M_{A,S_1 \to S_2}} \end{array} \right\}$$

2 cas particuliers :

- les torseurs dont la résultante est nulle ;
- les torseurs dont le moment est nul sur l'axe central.

Torseur des actions mécaniques

Définition (Torseur couple)

Si la résultante d'un torseur d'actions mécaniques est nulle, alors ce torseur est un torseur couple :

$$\forall M,\ \{\mathscr{T}_{S_1\to S_2}\} = {}_M\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{\mathscr{C}_{S_1\to S_2}}\end{array}\right\},\quad \overrightarrow{\mathscr{C}_{S_1\to S_2}} = \overrightarrow{M_{A,S_1\to S_2}}$$

Il possède les mêmes éléments de réduction en tous points.

Exemple

Le torseur global correspondant aux actions mécaniques induites par des forces électromagnétiques (volumiques) entre un stator et un rotor de moteur électrique est un torseur couple.

Torseur des actions mécaniques

Définition (Torseur couple)

Si la résultante d'un torseur d'actions mécaniques est nulle, alors ce torseur est un torseur couple :

$$\forall M,\ \{\mathscr{T}_{S_1\to S_2}\} = {}_M\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{\mathscr{C}_{S_1\to S_2}}\end{array}\right\},\quad \overrightarrow{\mathscr{C}_{S_1\to S_2}} = \overrightarrow{M_{A,S_1\to S_2}}$$

Il possède les mêmes éléments de réduction en tous points.

Exemple

Le torseur global correspondant aux actions mécaniques induites par des forces électromagnétiques (volumiques) entre un stator et un rotor de moteur électrique est un torseur couple.

Torseur des actions mécaniques

Définition (Glisseur)

Si le moment d'un torseur d'actions mécaniques est nul en un point alors que sa résultante est non nulle, alors ce torseur est un glisseur :

$$\forall M \in \left(A, \overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}}\right), \ \{\mathscr{T}_{S_1 \to S_2}\} = {}_M\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

Exemple

Le torseur global correspondant à une action mécanique induite par l'action de la pesanteur (force volumique) au centre de gravité du solide est un glisseur.

Torseur des actions mécaniques

Définition (Glisseur)

Si le moment d'un torseur d'actions mécaniques est nul en un point alors que sa résultante est non nulle, alors ce torseur est un glisseur :

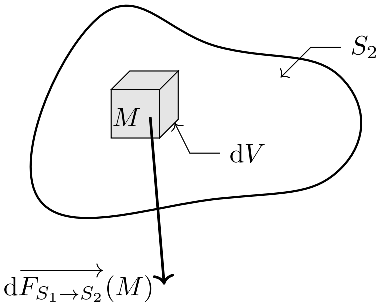
$$\forall M \in \left(A, \overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}}\right),\ \{\mathscr{T}_{S_1 \to S_2}\} = {}_M\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

Exemple

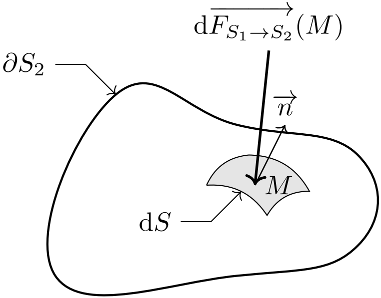
Le torseur global correspondant à une action mécanique induite par l'action de la pesanteur (force volumique) au centre de gravité du solide est un glisseur.

Point de vue
LOCAL

- Action mécanique élémentaire



Volumique



Surfacique

Action mécanique élémentaire

Définition (Action mécanique élémentaire)

Une action mécanique élémentaire exercée par un système matériel S_1 sur un système matériel S_2 au voisinage d'un point M est un glisseur noté :

$$\{\mathrm{d}\mathscr{T}_{S_1\rightarrow S_2}(M)\} = {}_{M}\left\{\begin{array}{c} \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}}(M) \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}$$

où $\mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}}(M)$ est la densité d'effort surfacique (respectivement volumique) exercée au point M sur un élément de surface $\mathrm{d}S$ (resp. de volume $\mathrm{d}V$).

Action mécanique élémentaire

Densité d'effort

La densité d'effort ou effort élémentaire surfacique (resp. volumique) au voisinage d'un point M est définie comme :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}} = f(M)\ \overrightarrow{u}(M)\ \mathrm{d}\tau$$

où :

- $f(M)$ est la norme de l'action mécanique surfacique au niveau du point M, homogène à une pression de contact et exprimée en N/m^2 (resp. une action mécanique volumique exprimée en N/m^3) ;
- $\overrightarrow{u}(M)$ est le vecteur unitaire portant la direction de l'effort élémentaire au point M ;
- $\mathrm{d}\tau$ est l'élément géométrique différentiel associé à la surface élémentaire $\mathrm{d}S$ (resp. volume élémentaire $\mathrm{d}V$).

Action mécanique élémentaire

Une action mécanique élémentaire au point M s'écrit :

$$\{\mathrm{d}\mathscr{T}_{S_1\rightarrow S_2}(M)\} = {}_M\left\{\begin{array}{c} \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}}(M) \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\} = {}_M\left\{\begin{array}{c} f(M)\ \overrightarrow{u}(M)\ \mathrm{d}\tau \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}$$

Les actions mécaniques élémentaires sont des glisseurs.

En mécanique « classique », on n'envisage pas d'action mécanique élémentaire de type couple et une action mécanique élémentaire s'écrit toujours sous la forme d'un glisseur au point local considéré. De ce fait, on élimine la possibilité d'actions électromagnétiques dans ce cours.

Action mécanique élémentaire

Une action mécanique élémentaire au point M s'écrit :

$$\{\mathrm{d}\mathscr{T}_{S_1\to S_2}(M)\} = {}_M\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\to S_2}}(M) \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_M\left\{ \begin{array}{c} f(M)\ \overrightarrow{u}(M)\ \mathrm{d}\tau \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

Les actions mécaniques élémentaires sont des glisseurs.

En mécanique « classique », on n'envisage pas d'action mécanique élémentaire de type couple et une action mécanique élémentaire s'écrit toujours sous la forme d'un glisseur au point local considéré. De ce fait, on élimine la possibilité d'actions électromagnétiques dans ce cours.

Action mécanique élémentaire

Une action mécanique élémentaire au point M s'écrit :

$$\{\mathrm{d}\mathscr{T}_{S_1\rightarrow S_2}(M)\} = {}_M\left\{\begin{array}{c}\mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}}(M)\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\} = {}_M\left\{\begin{array}{c}f(M)\ \overrightarrow{u}(M)\ \mathrm{d}\tau\\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}$$

Les actions mécaniques élémentaires sont des glisseurs.

🛈 *En mécanique « classique », on n'envisage pas d'action mécanique élémentaire de type couple et une action mécanique élémentaire s'écrit toujours sous la forme d'un glisseur au point local considéré. De ce fait, on élimine la possibilité d'actions électromagnétiques dans ce cours.*

Action mécanique élémentaire

- ## Glisseur au point d'application

$$\{\mathrm{d}\mathscr{T}_{S_1\rightarrow S_2}(M)\} = {}_{M}\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}}(M) \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\} = {}_{M}\left\{ \begin{array}{c} f(M)\ \overrightarrow{u}(M)\ \mathrm{d}\tau \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

- ## Éléments de réduction en un point quelconque

Par exemple en un point A, il vient :

$$\{\mathrm{d}\mathscr{T}_{S_1\rightarrow S_2}(M)\} = {}_{A}\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}}(M) \\ \overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}}(M) \end{array} \right\}$$

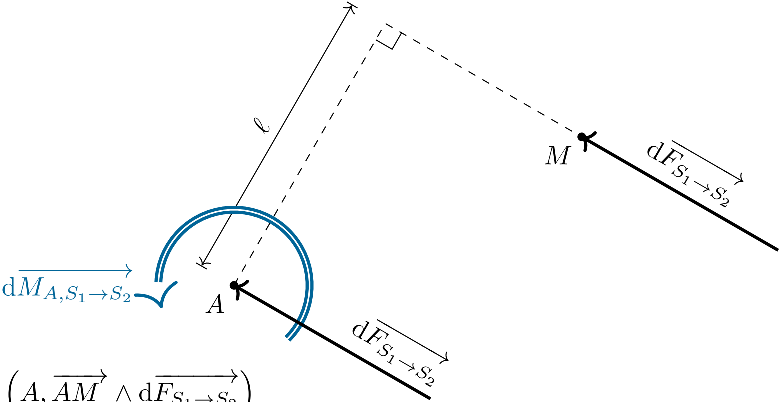
- ## Moment élémentaire

induit au point A par l'effort élémentaire exercé au point M :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{M_{A,S_1\rightarrow S_2}}(M) = \overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\rightarrow S_2}}(M)$$

Action mécanique élémentaire

- Moment élémentaire induit en A par un glisseur élémentaire au point M



Axe : $\left(A, \overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}}\right)$

Intensité : proportionnelle à $\mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}}$ et $\ell = \text{dist}\left(A, \left(M, \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1 \rightarrow S_2}}\right)\right)$.

Action mécanique élémentaire

Glisseur & axe central

Un glisseur en un point M traduit les éléments de réduction d'un torseur dont la résultante $\overrightarrow{F} \neq \overrightarrow{0}$ est non nulle mais dont le moment en ce point est nul.

la droite $\left(M, \overrightarrow{F}\right)$
est l'axe central du torseur

$\Rightarrow$ le moment du torseur sera nul
pour tous les points de cette droite

Point de vue
GLOBAL

Aspect global

- Torseur d'action mécanique totale

= somme des torseurs d'actions mécaniques élémentaires

$$\{\mathscr{T}_{S_1\to S_2}\} = \int_{M\in\mathcal{D}} \{\mathrm{d}\mathscr{T}_{S_1\to S_2}(M)\}$$

Le domaine d'intégration $\mathcal{D}$ de tous les points M sur lesquels s'exerce une action mécanique élémentaire est :

- le volume de S_2 pour une action volumique ;
- la surface de contact entre S_1 et S_2 pour une action surfacique.

Torseur d'action mécanique totale

- Détermination du torseur d'action mécanique totale

1. Initialement des glisseurs

$$\forall\, M \in \mathcal{D},\ \{\mathrm{d}\mathscr{T}_{S_1\to S_2}\} = {}_{M}\left\{\begin{array}{c} \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\to S_2}}(M) \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}$$

2. que l'on exprime au même point A

$$\forall\, M \in \mathcal{D},\ \{\mathrm{d}\mathscr{T}_{S_1\to S_2}\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{c} \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\to S_2}}(M) \\ \overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\to S_2}}(M) \end{array}\right\}$$

3. pour en faire la somme

$$\{\mathscr{T}_{S_1\to S_2}\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\int_{M\in\mathcal{D}} \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\to S_2}}(M) \\ \displaystyle\int_{M\in\mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\to S_2}}(M) \end{array}\right\}$$

Torseur d'action mécanique totale

Éléments de réduction

en un point A quelconque

- résultante :

$$\overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}} = \int_{M \in \mathcal{D}} \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}} = \int_{M \in \mathcal{D}} f(M)\, \overrightarrow{u}(M)\, \mathrm{d}\tau$$

  dont la norme (force ou effort) s'exprime en N ;

- moment au point A :

$$\overrightarrow{M_{A,S_1 \to S_2}} = \int_{M \in \mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}} = \int_{M \in \mathcal{D}} f(M)\, \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}(M)\, \mathrm{d}\tau$$

  dont la norme (moment ou couple si la résultante est nulle) s'exprime en N·m.

ATTENTION

- Calcul du moment « global » en un point

Il est très important de remarquer que l'intégration permettant d'obtenir le moment « global » en un point A porte sur tous les points $M \in \mathcal{D}$ et inclut par définition le produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}}$ tel que :

$$\overrightarrow{M_{A,S_1 \to S_2}} = \int_{M \in \mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}}(M)$$

Il n'y aurait donc pas de sens de mettre en facteur de cette intégrale sur tous les points $M \in \mathcal{D}$ une expression qui dépende de ces points.

ATTENTION

- Calcul du moment « global » en un point

Il est très important de remarquer que l'intégration permettant d'obtenir le moment « global » en un point A porte sur tous les points $M \in \mathcal{D}$ et inclut par définition le produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}}$ tel que :

$$\overrightarrow{M_{A,S_1 \to S_2}} = \int_{M \in \mathcal{D}} \overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}}(M)$$

Il n'y aurait donc pas de sens de mettre en facteur de cette intégrale sur tous les points $M \in \mathcal{D}$ une expression qui dépende de ces points.

Tout ce qui dépend d'un point M reste sous l'intégrale !

1 2 3 4 5

Modèles de répartition de charges

Cas des répartitions volumiques

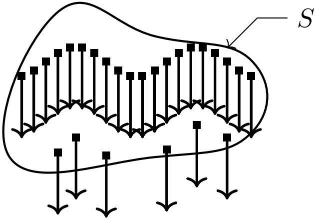
Exemple de la gravité

La pesanteur est un champ de force volumique supposé constant à la surface de la Terre :

$$f(M) = \rho g$$

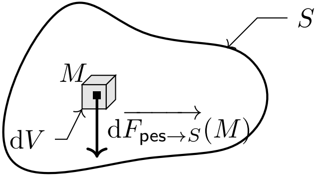
où

- g est l'accélération de la pesanteur ($9,81$ m/s^2 au sol), supposée constante pour tout solide de dimensions petites par rapport au rayon de la terre (« à taille humaine ») ;
- ρ la masse volumique (kg/m^3) du matériau constituant le solide, supposé uniforme (même matière) et homogène (même état de la matière).



Exemple de la gravité

Action mécanique élémentaire due à l'action de pesanteur en un point M quelconque est dirigée suivant la verticale descendante, ici notée $(-\overrightarrow{z})$:



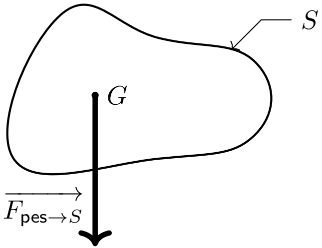
$$\mathrm{d}\overrightarrow{F_{\text{pes}\to S}} = -\rho g \overrightarrow{z}\ \mathrm{d}V$$

Elle est associée au torseur d'action mécanique élémentaire, successivement réduit au point M puis au point A :

$$\{\mathrm{d}\mathscr{T}_{\text{pes}\to S}\} = {}_M\left\{\begin{array}{c} -\rho g \overrightarrow{z}\ \mathrm{d}V \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} -\rho g \overrightarrow{z}\ \mathrm{d}V \\ -\rho g\ \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{z}\ \mathrm{d}V \end{array}\right\}$$

Exemple de la gravité

Torseur global des actions mécaniques exercées par la pesanteur sur le solide S s'écrit alors en un point A :



$$\{\mathcal{T}_{\text{pes}\to S}\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} -\displaystyle\int_S \rho g \,\vec{z}\,\mathrm{d}V \\ -\displaystyle\int_S \rho g \,\overrightarrow{AM} \wedge \vec{z}\,\mathrm{d}V \end{array}\right\}$$

Résultante

$$\vec{P} = -\int_S \rho g \,\vec{z}\,\mathrm{d}V = -g \underbrace{\left(\int_S \rho \,\mathrm{d}V\right)}_{m} \vec{z} = -mg\,\vec{z}$$

où on reconnaît la forme globale « classique » du poids d'un solide de masse m.

Cas des répartitions volumiques

Définition (Masse d'un solide)

La masse d'un solide S, de masse volumique ρ est définie par :

$$m = \int_S \rho \,\mathrm{d}V = \int_S \mathrm{d}m$$

Masse d'un solide homogène

Solide homogène si sa masse volumique est égale en tout point

$$\forall M \in S,\ \rho(M) = \rho \quad \Longrightarrow \quad m = \rho \underbrace{\int_S \mathrm{d}V}_{V} = \rho V$$

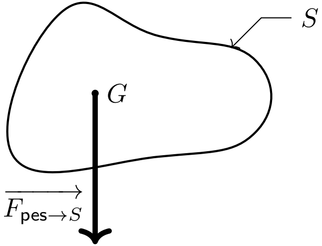
Éléments de masse pour les corps dont :

- une dimension est négligeable (plaques) $\Longrightarrow$ masse surfacique ρ_S telle que $dm = \rho_S \,\mathrm{d}S$ (exemple : feuilles 80 g/m^2) ;
- deux dimensions sont négligeables (fils) $\Longrightarrow$ masse linéique ρ_ℓ telle que $\mathrm{d}m = \rho_\ell \,\mathrm{d}\ell$.

Cas des répartitions volumiques

Exemple de la gravité

Torseur global des actions mécaniques exercées par la pesanteur sur le solide S s'écrit alors en un point A :



$$\{\mathscr{T}_{\text{pes}\rightarrow S}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} -\int_S \rho g \, \overrightarrow{z} \, \mathrm{d}V \\ -\int_S \rho g \, \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{z} \, \mathrm{d}V \end{array} \right\}$$

Moment en A (quelconque)

$$\overrightarrow{M_{A,\text{pes}\rightarrow S}} = -\int_S \rho g \, \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{z} \, \mathrm{d}V = -g\left(\int_S \rho \, \overrightarrow{AM} \, \mathrm{d}V\right) \wedge \overrightarrow{z}$$

Cas des répartitions volumiques

- Torseur global de l'action de pesanteur

$$\{\mathscr{T}_{\mathsf{pes}\rightarrow S}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{z} \\ -g\left(\int_S \rho\,\overrightarrow{AM}\,\mathrm{d}V\right) \wedge \overrightarrow{z} \end{array} \right\}$$

Comme $\overrightarrow{P} \neq \overrightarrow{0}$: axe central ?

- Axe central

Le torseur possède un axe central défini par la droite $\left(G_0, \overrightarrow{P}\right)$ telle que

$$\overrightarrow{G_0A} = \lambda\,\overrightarrow{P} + \frac{\overrightarrow{M_{A,\mathsf{pes}\rightarrow S}} \wedge \overrightarrow{P}}{\overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{P}}$$

avec λ une constante réelle.

- Torseur global de l'action de pesanteur

$$\{\mathscr{T}_{\text{pes}\to S}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{z} \\ -g\left(\displaystyle\int_S \rho\,\overrightarrow{AM}\,\mathrm{d}V\right)\wedge\overrightarrow{z} \end{array} \right\}_A$$

Comme $\overrightarrow{P} \neq \overrightarrow{0}$: axe central ?

- Axe central

Le torseur possède un axe central défini par la droite $\left(G_0, \overrightarrow{P}\right)$ telle que

$$\overrightarrow{G_0A} = \lambda\,\overrightarrow{P} + \frac{\overrightarrow{M_{A,\text{pes}\to S}} \wedge \overrightarrow{P}}{\overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{P}}$$

avec λ une constante réelle.

Cas des répartitions volumiques

- Torseur global de l'action de pesanteur

$$\{\mathscr{T}_{\text{pes}\to S}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{z} \\ -g\left(\int_S \rho\,\overrightarrow{AM}\,\mathrm{d}V\right) \wedge \overrightarrow{z} \end{array} \right\}$$

Comme $\overrightarrow{P} \neq \overrightarrow{0}$: axe central ?

- Axe central

Le torseur possède un axe central défini par la droite $\left(G_0, \overrightarrow{P}\right)$ telle que

$$\overrightarrow{G_0A} = \lambda\,\overrightarrow{P} + \frac{\overrightarrow{M_{A,\text{pes}\to S}} \wedge \overrightarrow{P}}{\overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{P}}$$

avec λ une constante réelle.

Cas des répartitions volumiques

Théorème

Le moment du torseur induit par une action de pesanteur est nul sur l'axe central.

De ce théorème, on en déduit que le torseur global d'une action mécanique de pesanteur exercée sur un solide S peut être défini comme un glisseur

$$\forall M \in \left(G_0, \overrightarrow{P}\right),\ \{\mathscr{T}_{\text{pes}\to S}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_M$$

En généralisant ce résultat à toute orientation du solide

Théorème

Il existe un unique point G d'un solide S tel que, quelle que soit l'orientation de ce dernier dans un champ de pesanteur uniforme $g\overrightarrow{z}$, le moment du torseur global en ce point, appelé centre de gravité, soit nul.

Cas des répartitions volumiques

Théorème

Le moment du torseur induit par une action de pesanteur est nul sur l'axe central.

De ce théorème, on en déduit que le torseur global d'une action mécanique de pesanteur exercée sur un solide S peut être défini comme un glisseur

$$\forall M \in \left(G_0, \overrightarrow{P}\right), \ \{\mathscr{T}_{\textsf{pes}\rightarrow S}\} = \underset{M}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}}$$

En généralisant ce résultat à toute orientation du solide

Théorème

Il existe un unique point G d'un solide S tel que, quelle que soit l'orientation de ce dernier dans un champ de pesanteur uniforme $g\overrightarrow{z}$, le moment du torseur global en ce point, appelé centre de gravité, soit nul.

Cas des répartitions volumiques

Théorème

Le moment du torseur induit par une action de pesanteur est nul sur l'axe central.

De ce théorème, on en déduit que le torseur global d'une action mécanique de pesanteur exercée sur un solide S peut être défini comme un glisseur

$$\forall M \in \left(G_0, \overrightarrow{P}\right), \ \{\mathscr{T}_{\text{pes}\to S}\} = {}_M\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}$$

En généralisant ce résultat à toute orientation du solide

Théorème

Il existe un unique point G d'un solide S tel que, quelle que soit l'orientation de ce dernier dans un champ de pesanteur uniforme $g\overrightarrow{z}$, le moment du torseur global en ce point, appelé centre de gravité, soit nul.

Cas des répartitions volumiques

Définition (Centre d'inertie d'un solide)

Le centre d'inertie G d'un solide S, de masse volumique ρ est défini par :

$$\int_S \overrightarrow{GM}\,\mathrm{d}m = \overrightarrow{0}$$

Proposition (Centre d'inertie d'un solide)

Le centre d'inertie G d'un solide S, de masse volumique ρ peut être déterminé à partir d'un point O quelconque comme :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_S \overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}m$$

Cas des répartitions volumiques

Définition (Centre d'inertie d'un solide)

Le centre d'inertie G d'un solide S, de masse volumique ρ est défini par :

$$\int_S \overrightarrow{GM} \, \mathrm{d}m = \overrightarrow{0}$$

Proposition (Centre d'inertie d'un solide)

Le centre d'inertie G d'un solide S, de masse volumique ρ peut être déterminé à partir d'un point O quelconque comme :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_S \overrightarrow{OM} \, \mathrm{d}m$$

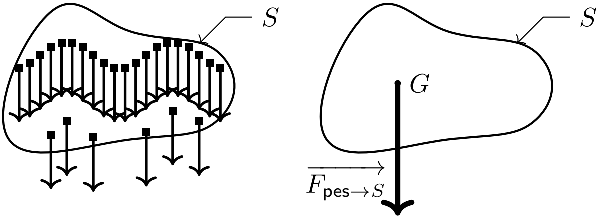
Cas des répartitions volumiques

- Centre d'inertie
  - si le système matériel est un solide indéformable, le centre d'inertie est un point fixe du solide ;
  - si le système matériel possède un élément de symétrie matérielle, plan ou axe de symétrie, aussi bien du point de vue géométrique que du point de vue de la répartition des masses, le centre d'inertie appartient à cet élément de symétrie ;
  - le centre d'inertie est confondu avec **centre de gravité** dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme ;
  - le centre d'inertie d'un système matériel est le barycentre de l'ensemble des points matériels du système affectés de leur masse. Pour un ensemble fini de solides S_i de masse m_i, le centre d'inertie G de l'ensemble matériel vérifie :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum m_i \, \overrightarrow{OG_i}}{\sum m_i}$$

Cas des répartitions volumiques

- Exemple de la gravité



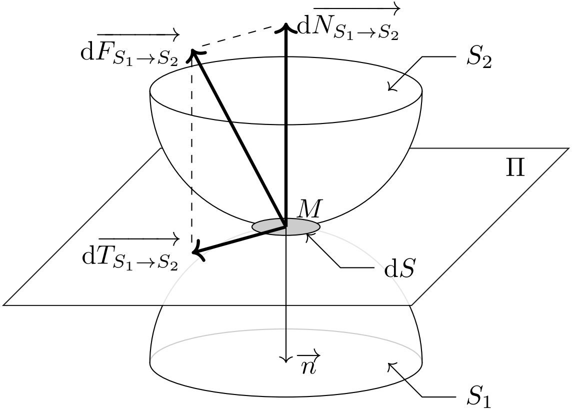
Torseur global de l'action de pesanteur exercée sur un solide S

$$\{\mathscr{T}_{\text{pes}\to S}\} = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}}$$

glisseur au centre d'inertie G

Cas des répartitions surfaciques

S_1 et S_2 sont deux solides en contact.



S_1 exerce sur S_2 une action mécanique qui empêche leur déplacement relatif (interpénétration) suivant la normale au plan tangent commun Π.

Cas des répartitions surfaciques

- Effort élémentaire

$$\mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}} = \mathrm{d}\overrightarrow{N_{S_1 \to S_2}} + \mathrm{d}\overrightarrow{T_{S_1 \to S_2}}$$

avec

- $\mathrm{d}\overrightarrow{N_{S_1 \to S_2}}$ est l'effort élémentaire porté par la normale $\overrightarrow{n}$ au plan tangent commun Π en M dirigée vers l'extérieur de la matière à S_2 et telle que $\mathrm{d}\overrightarrow{N_{S_1 \to S_2}} = \mathrm{d}N_{S_1 \to S_2}\ \overrightarrow{n}$;
- $\mathrm{d}\overrightarrow{T_{S_1 \to S_2}}$ est un effort élémentaire dont la direction est dans le plan tangent commun tel que $\mathrm{d}\overrightarrow{T_{S_1 \to S_2}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

- Action mécanique élémentaire de S_1 sur S_2

$$\{\mathrm{d}\mathscr{T}_{S_1 \to S_2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1 \to S_2}} = \mathrm{d}\overrightarrow{N_{S_1 \to S_2}} + \mathrm{d}\overrightarrow{T_{S_1 \to S_2}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_M$$

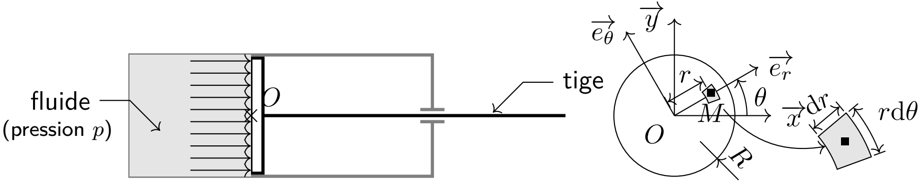
- Action mécanique totale

Intégrée sur toute la surface de contact S, en un point A quelconque :

$$\{\mathscr{T}_{S_1\to S_2}\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\int_S \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\to S_2}} = \int_S \mathrm{d}\overrightarrow{N_{S_1\to S_2}} + \int_S \mathrm{d}\overrightarrow{T_{S_1\to S_2}} \\ \displaystyle\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F_{S_1\to S_2}} \end{array}\right\}$$

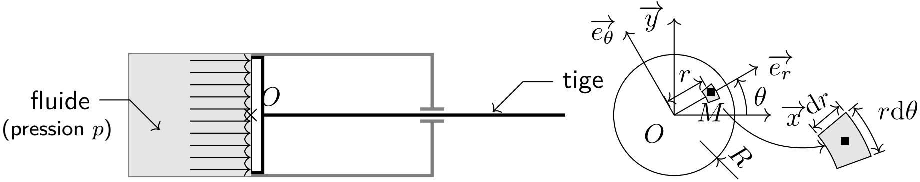
Cas des répartitions surfaciques

- Exemple



Action globale du fluide sous pression
sur la tige du vérin ?

- Exemple



Action globale du fluide sous pression
sur la tige du vérin ?

1 2 3 4 5

Actions mécaniques transmissibles par les liaisons

Objectif

Torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons ?

À déterminer d'un point de vue global.

2 approches :

1. du local au global (avec des hypothèses sur les pressions de contact) ;
2. détermination à partir de la dualité avec le torseur cinématique.

Exemple guide :

Liaison cylindre–plan

Objectif

Torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons ?

À déterminer d'un point de vue global.

2 approches :

1. du local au global (avec des hypothèses sur les pressions de contact) ;
2. détermination à partir de la dualité avec le torseur cinématique.

Exemple guide :

Liaison cylindre–plan

Actions mécaniques transmissibles par les liaisons

Objectif

Torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons ?

À déterminer d'un point de vue global.

2 approches :

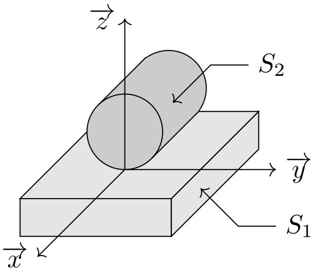
1. du local au global (avec des hypothèses sur les pressions de contact) ;
2. détermination à partir de la dualité avec le torseur cinématique.

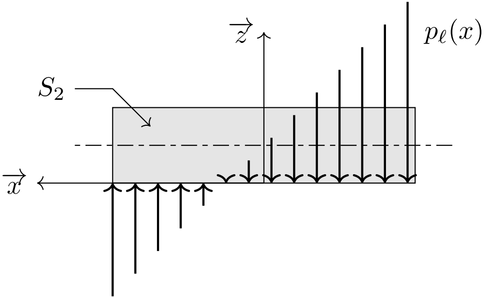
Exemple guide :

Liaison cylindre–plan

À partir de l'aspect local

- Liaison cylindre-plan de normale $\overrightarrow{z}$ et de direction $\overrightarrow{x}$

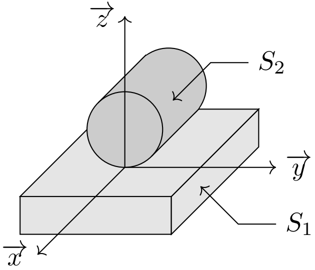


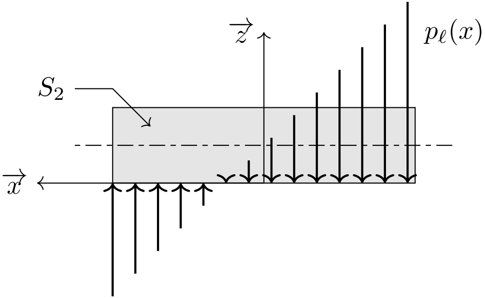


Charge linéique (N·mm^{-1}) : $p_\ell(x) = ax + b$
où a (N·mm^{-2}) et b (N·mm^{-1}) sont deux constantes.

Action globale de S_1 sur S_2 ?

- Liaison cylindre-plan de normale $\overrightarrow{z}$ et de direction $\overrightarrow{x}$





Charge linéique (N·mm^{-1}) : $p_\ell(x) = ax + b$
où a (N·mm^{-2}) et b (N·mm^{-1}) sont deux constantes.

Action globale de S_1 sur S_2 ?

Point de vue global

Définition (Puissance dissipée dans une liaison)

La puissance mécanique dissipée dans une liaison entre deux solides S_1 et S_2 est égale au co-moment du torseur des actions mécaniques transmissibles et du torseur cinématique :

$$\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = \left\{\mathscr{T}_{S_1\rightarrow S_2}\right\} \otimes \left\{\mathscr{V}_{S_2/S_1}\right\} \leqslant 0$$

Si $\left\{\mathscr{T}_{S_1\rightarrow S_2}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_{1\rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A,1\rightarrow 2}} \end{array}\right\}$

et $\left\{\mathscr{V}_{S_2/S_1}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A,2/1}} \end{array}\right\}$

alors

$$\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = \overrightarrow{R_{1\rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{V_{A,2/1}} + \overrightarrow{M_{A,1\rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

Point de vue global

Définition (Puissance dissipée dans une liaison)

La puissance mécanique dissipée dans une liaison entre deux solides S_1 et S_2 est égale au co-moment du torseur des actions mécaniques transmissibles et du torseur cinématique :

$$\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = \left\{\mathscr{T}_{S_1\rightarrow S_2}\right\} \otimes \left\{\mathscr{V}_{S_2/S_1}\right\} \leqslant 0$$

Si $\left\{\mathscr{T}_{S_1\rightarrow S_2}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R_{1\rightarrow 2}} \\ \overrightarrow{M_{A,1\rightarrow 2}} \end{array}\right\}$

et $\left\{\mathscr{V}_{S_2/S_1}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A,2/1}} \end{array}\right\}$

alors

$$\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = \overrightarrow{R_{1\rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{V_{A,2/1}} + \overrightarrow{M_{A,1\rightarrow 2}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$$

Point de vue global

Définition (Puissance dissipée dans une liaison)

La puissance mécanique dissipée dans une liaison entre deux solides S_1 et S_2 est égale au co-moment du torseur des actions mécaniques transmissibles et du torseur cinématique :

$$\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = \left\{\mathscr{T}_{S_1\rightarrow S_2}\right\} \otimes \left\{\mathscr{V}_{S_2/S_1}\right\} \leqslant 0$$

Si $\left\{\mathscr{T}_{S_1\rightarrow S_2}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{R_{1\rightarrow 2}}\\ \overrightarrow{M_{A,1\rightarrow 2}}\end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}X\overrightarrow{x}+Y\overrightarrow{y}+Z\overrightarrow{z}\\ L\overrightarrow{x}+M\overrightarrow{y}+N\overrightarrow{z}\end{array}\right\}$

et $\left\{\mathscr{V}_{S_2/S_1}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{2/1}}\\ \overrightarrow{V_{A,2/1}}\end{array}\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}p\overrightarrow{x}+q\overrightarrow{y}+r\overrightarrow{y}\\ u\overrightarrow{x}+v\overrightarrow{y}+w\overrightarrow{z}\end{array}\right\}$

alors

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} &= \overrightarrow{R_{1\rightarrow 2}}\cdot\overrightarrow{V_{A,2/1}} + \overrightarrow{M_{A,1\rightarrow 2}}\cdot\overrightarrow{\Omega_{2/1}}\\ &= Xu+Yv+Zw+Lp+Mq+Nr\end{aligned}$$

- Hypothèse fondamentale

Liaisons parfaites

Définition (Liaison parfaite)

Une liaison entre deux solides S_1 et S_2 est dite parfaite si elle est sans jeu et si elle ne dissipe pas d'énergie :

$$\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = \{\mathscr{T}_{S_1\rightarrow S_2}\} \otimes \{\mathscr{V}_{S_2/S_1}\} = 0$$

- Construction par dualité

Après réduction des deux torseurs en un même point :

$$\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = Xu + Yv + Zw + Lp + Mq + Nr = 0$$

Construction pratique (dualité, global)

- Hypothèse fondamentale

Liaisons parfaites

Définition (Liaison parfaite)

Une liaison entre deux solides S_1 et S_2 est dite parfaite si elle est sans jeu et si elle ne dissipe pas d'énergie :

$$\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = \left\{\mathscr{T}_{S_1\rightarrow S_2}\right\} \otimes \left\{\mathscr{V}_{S_2/S_1}\right\} = 0$$

- Construction par dualité

Après réduction des deux torseurs en un même point :

$$\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = Xu + Yv + Zw + Lp + Mq + Nr = 0$$

- Hypothèse fondamentale

Liaisons parfaites

Définition (Liaison parfaite)

Une liaison entre deux solides S_1 et S_2 est dite parfaite si elle est sans jeu et si elle ne dissipe pas d'énergie :

$$\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = \left\{\mathscr{T}_{S_1\rightarrow S_2}\right\} \otimes \left\{\mathscr{V}_{S_2/S_1}\right\} = 0$$

- Construction par dualité

Après réduction des deux torseurs en un même point :

$$\mathscr{P}_{1\leftrightarrow 2} = Xu + Yv + Zw + Lp + Mq + Nr = 0$$

Construction pratique (dualité, global)

- Liaison cylindre-plan de normale $\overrightarrow{z}$ et de direction $\overrightarrow{x}$

Torseur des actions mécaniques transmissibles « complet » :

$$\{\mathscr{T}_{S_1 \to S_2}\} = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{1\to 2}} = X\overrightarrow{x} + Y\overrightarrow{y} + Z\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{M_{G,1\to 2}} = L\overrightarrow{x} + M\overrightarrow{y} + N\overrightarrow{z} \end{array} \right\}}$$

Torseur cinématique du mouvement de S_2 par rapport à S_1 :

$$\{\mathscr{V}_{S_2/S_1}\} = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{21}} = \omega_x\overrightarrow{x} + \omega_z\overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{V_{G,2/1}} = V_x\overrightarrow{x} + V_y\overrightarrow{y} \end{array} \right\}}$$

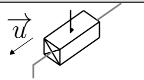
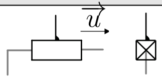
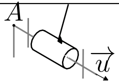
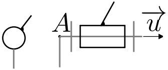
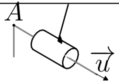
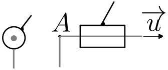
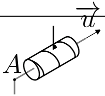
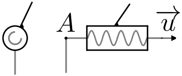
Co-moment :

$$\overrightarrow{R_{1\to 2}} \cdot \overrightarrow{V_{G,2/1}} + \overrightarrow{M_{G,1\to 2}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{21}} = XV_x + YV_y + L\omega_x + N\omega_z = 0$$

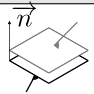
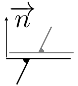
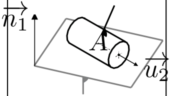
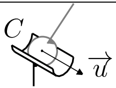
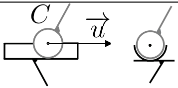
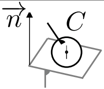
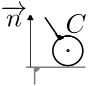
vrai $\forall \omega_x, \omega_z, V_x, V_y \Rightarrow X = Y = 0$ et $L = N = 0$ donc :

$$\{\mathscr{T}_{S_1 \to S_2}\} = \underset{G}{\left\{ \begin{array}{c} Z\overrightarrow{z} \\ M\overrightarrow{y} \end{array} \right\}}$$

AMs transmissibles par les liaisons (1/2)

Liaison	Schém. spatiale	Schém. plane	Torseur AM transmissibles
Glissière			${}_B\left\{\begin{array}{c} Y\vec{v}+Z\vec{w} \\ L\vec{u}+M\vec{v}+N\vec{w} \end{array}\right\}$
Pivot			$\star\ \forall B \in (A, \vec{u})$, ${}_B\left\{\begin{array}{c} X\vec{u}+Y\vec{v}+Z\vec{w} \\ M\vec{v}+N\vec{w} \end{array}\right\}$
Pivot glissant			$\star\ \forall B \in (A, \vec{u})$, ${}_B\left\{\begin{array}{c} Y\vec{v}+Z\vec{w} \\ M\vec{v}+N\vec{w} \end{array}\right\}$
Hélicoïdale			pas p à droite, $\star\ \forall B \in (A, \vec{u})$, ${}_B\left\{\begin{array}{c} X\vec{u}+Y\vec{v}+Z\vec{w} \\ -\frac{p}{2\pi}X\vec{u}+M\vec{v}+N\vec{w} \end{array}\right\}$

$\star$ Même forme de torseur, mais les valeurs des composantes de moment changent.

Liaison	**Schém. spatiale**	**Schém. plane**	**Torseur AM transmissibles**
Appui-plan			${}_A\left\{\begin{array}{c} X\overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{M_A}\end{array}\right\}, \overrightarrow{M_A}\cdot\overrightarrow{n}=0$
Sphérique			${}_C\left\{\begin{array}{c} X\overrightarrow{u}+Y\overrightarrow{v}+Z\overrightarrow{w} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}$
Cylindre-plan			${}_A\left\{\begin{array}{c} X\overrightarrow{n_1} \\ \overrightarrow{M_A}\end{array}\right\}, \begin{cases}\overrightarrow{M_A}\cdot\overrightarrow{n_1}=0\\ \overrightarrow{M_A}\cdot\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}$
Sphère-cylindre			${}_C\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\} \overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{u}=0$
Sphère-plan			$\forall M\in(C,\overrightarrow{n}),\ {}_M\left\{\begin{array}{c} X\overrightarrow{n} \\ \overrightarrow{0}\end{array}\right\}$

1 2 3 4 5

Modélisation du frottement

Modélisation du frottement

Objet d'un autre cours.