Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2024-2025.

Fiche 56 : Calcul asymptotique.

Exercice 1

Donner des équivalents les plus simples possibles des suites : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$, $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}$, $\frac{n+(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$

Exercice 2

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{2n-1}{n^2+n}$ et $v_n = \dfrac{\ln(n)+6n^2}{3n^3-2n\ln(n)}$.

1. Déterminer des équivalents simples des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer des équivalent simples de $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$.

Exercice 3

Comparer (au sens de "est négligeable par rapport à") les suites suivantes :

$$a_n = n^n, \qquad b_n = n^{\ln(n)}, \qquad c_n = e^{n^2}, \qquad d_n = (\ln n)^{n\ln n}$$

Exercice 4

Donner les développements limités aux ordres demandés des fonctions proposés :

1. Développement à l'ordre 3 pour $x \to \pi/4$ de $\sin(x)$.
2. Développement à l'ordre 4 pour $x \to 0$ de $\frac{1}{\cos(x)}$.
3. Développement à l'ordre 2 pour $x \to 2$ de $\sqrt{x}$.
4. Développement à l'ordre 3 pour $x \to \pi/3$ de $\tan(x)$.
5. Développement à l'ordre 4 pour $x \to 0$ de $\exp(\cos(x))$.

Exercice 5

1. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et si $(u_n) \to 0$ alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
2. Soit a un réel. Déterminer la limite de $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$.

Exercice 6 : Théorème de Césaro

On considère une suite (u_n) telle que $u_n \to l \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{n}(u_1+\cdots+u_n) \to l$$

Exercice 7 : Lemme de Césaro

On considère une suite (u_n) telle que $u_{n+1}-u_n \to l \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$u_n \sim n.l$$

Indication : on pourra utiliser le théorème de Césaro.

Exercice 8

1. Étudier la suite définie par : $u_0 > 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.
2. On pose $v_n = u_n^2 - u_{n-1}^2$. Montrer que $\lim v_n = 2$, puis en déduire que $u_n \sim \sqrt{2n}$ (on pourra utiliser le lemme de Césaro précédent).