

Fiche 57 : TD du 13-03.

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin x}{x^3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Exercice 2

Étudier et tracer le graphique de la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x^4}{x^2+x+1}}$.
On montrera qu'elle admet en $\pm\infty$ des asymptotes qu'on précisera.

Exercice 3

Calculer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3(2)^{\frac{1}{n}} - 2(3)^{\frac{1}{n}})^n$$
$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{x^e - x^x}{e^x - e^e}$$

Exercice 4

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + 3x + 2x^2}$$

1. Préciser le domaine de définition D_f de f .
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f .
3. Décomposer f en éléments simples et retrouver le résultat précédent.
4. Montrer que f est \mathcal{C}^∞ sur D_f et en déduire que f admet un développement à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0. Préciser $f^{(n)}(x)$ pour $x \in D_f$.
5. Écrire le développement de f à tout ordre n en 0. On donnera le résultat sous la forme $f(x) = 1 - 3x + \dots + a_n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ en précisant a_n en fonction de n .