

Fiche 58 : Fonctions dérivables.

Exercice 1

Montrer que l'expression $f(x) = xe^x$ définit une bijection de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+ on note g sa réciproque :

1. Montrer que :

$$g(y) \sim_{y \rightarrow +\infty} \ln(y)$$

2. Donner un équivalent simple de $g(y) - \ln(y)$ pour $y \rightarrow +\infty$.

Exercice 2

Donner un équivalent simple de $\arccos(1 - h)$ pour $h \rightarrow 0^+$ en utilisant le développement de \cos pour $x \rightarrow 0$.

Exercice 3

Donner des équivalents simples pour $x \rightarrow +\infty$ des expressions suivantes :

$$f_1(x) = e^{\sqrt{x^2-1}}, \quad f_2(x) = \operatorname{sh}\left(x + \frac{1}{x}\right), \quad f_3(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{x-1})$$

Exercice 4

Soit f une fonction de classe C^2 positive sur \mathbb{R} .

1. Montrer que en tout point x_0 tel que $f(x_0) = 0$ alors $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \geq 0$.
2. Montrer que si \sqrt{f} est dérivable sur \mathbb{R} alors, en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$: $f''(x_0) = 0$.
3. Montrer que si, en tout point x_0 tel que $f(x_0) = 0$ alors $f''(x_0) = 0$, alors \sqrt{f} est dérivable sur \mathbb{R} .

On pourra utiliser la formule de Taylor Young.