Fiche 59 : Td du 20-03.

Exercice 1

1. Déterminer le développement limité en 0 de la fonction $x \to \sin(\exp(x))$ à l'ordre 3 :
$$\sin(\exp(x)) = ... + o_{x\to 0}(x^3)$$
2. Déterminer le développement limité en 0 de la fonction $x \to \arctan(\sin(x))$ à l'ordre 3 :
$$\arctan(\sin(x)) = ... + o_{x\to 0}(x^3)$$
3. Déterminer le développement limité en 0 de la fonction $x \to \arctan(\cos(x))$ à l'ordre 4 :
$$\arctan(\cos(x)) = ... + o_{x\to 0}(x^4)$$

Exercice 2

On considère la fonction :
$$f(x) = \frac{1}{1-(x+x^2)}$$
(*Dans cet exercice, il n'est pas utile de faire de décomposition en éléments simples de* f)

1. Donner le domaine de définition D_f de f et justifier (sans les calculer) que f admet en 0 des développements limités à tous les ordres en 0.
2. Donner le développement en 0 de f à l'ordre 5 .
3. On fixe $n > 5$ et on note $f(x) = \sum_{k=0}^{n} F_k x^k + o_{x\to 0}(x^n)$ le développement à l'ordre n de f.
   (a) Préciser les valeurs de $F_0, \dots, F_5$.
   (b) Éventuellement en considérant la fonction $x \to x.f(x) + x^2.f(x)$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$
4. Donner un équivalent élémentaire de $f(x)$ pour $x \to +\infty$ puis un développement de $f(x)$ pour $x \to +\infty$ de précision $o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

Exercice 3

Soit $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer brièvement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et converge vers 0.
2. (a) Déterminer un réel α tel que la suite $\frac{1}{u_{n+1}^{\alpha}} - \frac{1}{u_n^{\alpha}}$ ait une limite finie non nulle.
   (b) En utilisant le lemme de Césaro, déterminer un équivalent simple de u_n.

Problème

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{ch}(x)$.

3. Montrer que f définit une bijection impaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note g sa réciproque.
4. Justifier que g est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de f en 0.
6. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f en 1 sous la forme $f(x+1) = ... + o_{x\to 0}(x^2)$. *On pourra utiliser la formule* $\mathrm{ch}(x+1) = \mathrm{ch}(x).\mathrm{ch}(1) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(1)$ *après l'avoir justifiée*
7. Déterminer le développement à l'ordre 5 de g en 0 (*On pourra le chercher sous forme de coefficients indéterminés*).
8. Déterminer le développement à l'ordre 2 de g en ch(1) sous la forme $g(\mathrm{ch}(1) + h) = ... + o_{h\to 0}(h^2)$.
   On rappelle et on ne demande pas de justifier que si 2 fonctions m et n définies au voisinage d'un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ vérifient pour $x \to a$: $m(x) \sim n(x) \to +\infty$ alors $\ln(m(x)) \sim \ln(n(x))$.
   (a) Montrer que $g(y) \sim \ln(y)$ pour $y \to +\infty$.
   (b) Donner un équivalent élémentaire de $g(y) - \ln(y)$ pour $y \to \infty$.