Fiche 60 : Fonctions convexes.

Exercice 1

On s'intéresse au développement de tan en 0. Pour cela, on considère la relation :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

1. Montrer que l'équivalent classique : $\tan(x) \sim_{x\to 0} x$ permet avec celle ci de retrouver le développement à l'ordre 3 de tan.
2. En utilisant cette méthode, déterminer le développement aux ordres 5 puis 7 de tan.

Exercice 2

Montrer que si $(a_1, \dots a_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^n$ alors

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$$

On pourra utiliser la concavité de la fonction ln.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et continue. Montrer que l'on a :
– soit f est croissante sur $\mathbb{R}$.
– soit f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
– soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f est décroissante sur $]-\infty, a]$, puis croissante sur $[a, +\infty[$.

Exercice 4

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ convexe, continue et bornée. Montrer que f est décroissante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, continue et bornée. Montrer que f est constante.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, continue telle que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = mx + p$ en $+\infty$.
Montrer que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de cette asymptote.