

DM 4 pour le 24-03.

Pour $n \in \mathbb{N}$, et $0 \leq k \leq n$, on considère les polynômes :

$$B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$$

1. Représenter sur un même graphique les fonctions $B_{3,k}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$ et $x \in [0, 1]$.
2. Étudier $B_{n,k}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
3. Calculer

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k}$$

En déduire que pour tout n et $0 \leq k \leq n$, $x \in [0, 1]$, $B_{n,k}(x) \leq 1$.

4. Vérifier

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

(domaine de la relation à préciser) en déduire : $\sum_{k=0}^n k B_{n,k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

5. Calculer : $\sum_{k=0}^n k(k-1) B_{n,k}$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,n})$ est une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.
7. Déterminer les coordonnées de $(1, X, \dots, X^n)$ dans la base précédente.