Fiche 61 : Matrices.

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan F d'équation $x+y-z=0$ et $G = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer rapidement que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Déterminer les matrices dans las bases canoniques des projections p (sur F) et q (sur G) ainsi que des symétries r (par rapport à F) et s (par rapport à G) associées.
3. Déterminer une base B adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
4. Déterminer les matrices dans B de p, q, r, s.

Exercice 2

On considère la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

1. Montrer que les espaces $E_1 = \ker(f+Id)$, $E_2 = \ker(f-Id)$ et $E_3 = \ker(f+2Id)$ sont des droites vectorielles et déterminer des vecteurs non nuls v_1 de E_1, v_2 de E_2 et v_3 de E_3.
2. Montrer que $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice D de f dans la base B.
4. Déterminer la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

On considère la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

représentant dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ l'endomorphisme u.

1. Calculer $\ker(A-2I_3)$ et $\ker(A-3I_3)$ en donnant des bases de ces espaces.
2. Montrer que la réunion des 2 bases précédentes est une base B de $\mathbb{R}^3$.
3. Préciser la matrice D de u dans la base B.