# Fiche 63 : Matrices.

**Exercice 1**

Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $(i, j, k)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $u(2i - 3j + 5k)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
3. Calculer $M^2$ et $M^3$.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Im}(u^2)$.

**Exercice 2**

Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $A(\theta) \times A(\theta')$ et $\big(A(\theta)\big)^n$ pour $n \geq 1$.

**Exercice 3**

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f$ l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui même $M \mapsto AM$.
Montrer que $f$ est linéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 4**

On considère les matrices :

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \; , \; \Pi_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \; , \; A = \Pi_1 + 5\Pi_2$$

1. Montrer que $\Pi_1$ et $\Pi_2$ sont des matrices de projecteurs associés à une décompositionde l'espace $\mathbb{R}^2$ qu'on précisera.
2. En déduire , si $n \in \mathbb{Z}$, une expression simple de $A^n$.