Fiche 64 : Matrices.

Exercice 1

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

- (a) Calculer B^2, B^3 .
- (b) Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.
- (c) En déduire A^n Pour tout entier n .

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier n , calculer A^n en utilisant $A - I_4$.

Exercice 2

Soit E un espace de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0, p \in \mathbb{N}^*$.

- 1. $e \in E$ est tel que $f^{p-1}(e) \neq 0$, montrer que la famille $(e, f(e), \dots, f^{p-1}(e))$ est libre.
- 2. En déduire que $p \leq n$.
- 3. Dans le cas où $n = p$, déterminer la matrice de f dans la base $B = (e, f(e), \dots, f^{n-1}(e))$.
- 4. Étudier le cas de la dérivation D dans l'espace $E = \mathbb{R}_{n-1}$: déterminer une base de la forme précédente.

Exercice 3

$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

En considérant son noyau, montrer que A est inversible.

Exercice 4 : Matrice d'adjacence d'un graphe

On considère G un *graphe* à n sommets c'est à dire un ensemble $S_1, \dots, S_n$ de *sommets* reliés ou non entre eux par des *arêtes* (on parle de sommets *adjacents* si c'est le cas). Un sommet n'est jamais adjacent à lui même.

On note $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ sa *matrice d'adjacence* en posant pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$: $a_{i,j} = a_{j,i} = 1$ quand S_i et S_j sont adjacents.

On appelle *chemin* c de longueur $p > 0$, une suite $(S_{c(k)})_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket}$ de sommets tel que 2 sommets consécutifs de la suite sont adjacents. On dit qu'un tel chemin *va de* $S_{c(0)}$ à $S_{c(p)}$. p est la *longueur* du chemin.

- 1. Montrer que pour $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = [n_{i,j}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ où, pour $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, $n_{i,j}^{(p)}$ est le nombre de chemins de longueur p allant du sommet S_i au sommet S_j .
- 2. Un *triangle* dans un graphe est un groupe de 3 sommets distincts 2 à 2 et 2 à 2 adjacents. Montrer que G contient un triangle si et seulement si on peut trouver dans A et A^2 deux coefficients non nuls à la même place.
- 3. Un graphe est *connexe* quand 2 quelconques de ses sommets distincts peuvent être reliés par au moins un chemin.
 - (a) Montrer que dans si G est connexe alors 2 quelconques de ses sommets distincts peuvent être reliés par au moins un chemin de longueur au plus $n - 1$.
 - (b) Montrer que G est connexe si et seulement si la matrice $(I_n + A)^{n-1}$ ne comporte aucun 0.