Chapitre 15 : Intégration

Plan

1 Continuité uniforme.

Rappelons qu'une fonction f est continue sur un intervalle I quand :

$$(\forall x \in I)(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha_{x,\epsilon} > 0)(\forall y \in I) \ : \ |y - x| \leq \alpha_{x,\epsilon} \implies |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$$

Une fonction f est dite **uniformément continue** sur un intervalle I quand :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha_{\epsilon} > 0)(\forall x \in I)(\forall y \in I) \ : \ |y - x| \leq \alpha_{\epsilon} \implies |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$$

Par l'inégalité des accroissements finis, une fonction f dérivable et à dérivée bornée sur un intervalle I, par exemple une fonction $\mathcal{C}^1$ sur un segment, est uniformément continue sur I.

Plus généralement : sur un segment, on a :

Théorème 1 (Théorème de Heine) *Une fonction continue sur un segment y est uniformément continue.*

Notons que l'ensemble des fonctions continues et l'ensemble des fonctions uniformément continues sur un intervalle I forment chacun des sous espaces vectoriels et des sous anneaux de l'ensemble des fonctions définies sur I.

2 Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux.

On considère un segment $[a,b]$ avec $a<b$, on appelle **subdivision** s de $[a,b]$ une suite finie de points $a=a_0<a_1\cdots<a_{n-1}<a_n$.

Le **pas** de la subdivision est le nombre

$$p(s)=\mathrm{Max}_{i=1,\ldots,n}|a_i-a_{i-1}|$$

Une **fonction en escalier** f sur un segment $[a,b]$ est une fonction définie sur $[a,b]$ telle qu'il existe une subdivision $a=a_0<a_1\cdots<a_{n-1}<a_n=b$ dite **adaptée à** f de I telle que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$: $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est une constate.

Une **fonction en escalier** f sur un intervalle quelconque I est une fonction définie sur I telle sa restriction à tout segment inclus dans I est une fonction en escalier.
On montre que l'ensemble des fonctions en escalier sur un intervalle I est un sous espace vectoriel et un sous anneau de l'ensemble des fonctions définies sur I.

Une **fonction continue par morceaux** f sur un segment $[a,b]$ est une fonction telle qu'il existe une subdivision $a=a_0<a_1\cdots<a_{n-1}<a_n$ de I telle que pour tout $i\in\langle 1,n\rangle$: $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ est une fonction continue et prolongeable par continuité au segment : $[a_i,a_{i+1}]$.

Une **fonction continue par morceaux** f sur un intervalle quelconque I est une fonction définie sur I telle sa restriction à tout segment inclus dans I est une fonction continue par morceaux.

On montre que l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I est un sous espace vectoriel et un sous anneau de l'ensemble des fonctions définies sur I.

3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Soit $I=[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ $(a<b)$.

Définition 1 *Soit f une fonction constante par morceaux sur $I=[a,b]$ et s une subdivision adaptée à f, on définit :*

$$\int_{[a,b]} f(t)dt=\int_{[a,b]} f=\int_a^b f(t)dt=\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i)\cdot f|_{]a_i,a_{i+1}[}$$

Constatons que si f est positive, l'aire située "sous la courbe" de f. Si f n'est pas positive, on compte positivement l'aire située sous la courbe de f pour ce qui est des segments où f est positive et négativement l'aire située entre la courbe de f et l'axe des abscisses pour ce qui est des segments où f est négative.

$\int_{[a,b]} f$ est l'**intégrale de f sur** I.

Par extension, via le théorème de Heine :

Définition 2 *Soit f une fonction continue par morceaux sur $I = [a,b]$ $(a < b)$, on peut définir un nombre :*

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_{[a,b]} f(t)dt$$

qui est, si f est positive, l'aire située "sous la courbe" de f. Si f n'est pas positive, on compte positivement l'aire située sous la courbe de f pour ce qui est des segments où f est positive et négativement l'aire située entre la courbe de f et l'axe des abscisses pour ce qui est des segments où f est négative.

*$\int_{[a,b]} f$ est l'**intégrale de f sur** I.*

Pour ce qui est de la définition formelle de l'intégrale, on peut poser : (formule hors programme) :

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = \text{Sup}\left\{\int_{[a,b]} g(t)dt \Big/ g \text{ fonction constante par morceaux minorant } f \text{ sur } [a,b]\right\}$$

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = \text{Inf}\left\{\int_{[a,b]} h(t)dt \Big/ h \text{ fonction constante par morceaux majorant } f \text{ sur } [a,b]\right\}$$

On a de suite :

Propriété 1 *Si f est continue par morceaux sur I et si on pose : $f_+ = \text{Sup}(f,0)$ et $f_- = -\text{Inf}(0,f)$, alors :*

$$\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_{[a,b]} |f_+(t)|dt - \int_{[a,b]} |f_-(t)|dt$$

Propriété 2 *Si la fonction f, continue par morceaux, est positive sur $[a,b]$ alors $\int_{[a,b]} f(t)dt$ est positive. C'est à dire :*

$$\textit{Si } f \geq 0 \textit{ alors } \int_{[a,b]} f(t)dt \geq 0$$

De même :

Si les fonctions f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$ alors :

$$\text{Si } f \geq g \text{ alors } \int_{[a,b]} f(t)dt \geq \int_{[a,b]} g(t)dt$$

Enfin et surtout :

Théorème 2 (Inégalité triangulaire) *Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ alors :*

$$\left| \int_{[a,b]} f(t)dt \right| \leq \int_{[a,b]} |f(t)|\, dt$$

On considère toujours une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$.

Définition 3 *On pose si $a \neq b$:*

$$m(f) = \frac{1}{|b-a|} \int_{[a,b]} f(t)dt$$

$m(f)$ est la moyenne de f sur $[a, b]$

Propriété 3 *Si pour tout $t \in [a, b]$, $m \leq f(t) \leq M$ alors :*

$$m \leq m(f) \leq M$$

En particulier :

$$\mathrm{Inf}_{[a,b]}(f) \leq m(f) \leq \mathrm{Sup}_{[a,b]}(f)$$

Dans le sens réciproque, on obtient :

Propriété 4 *Si la fonction f est continue et positive sur $[a, b]$, $a < b$ alors :*

$$\text{Si } \int_{[a,b]} f(t)dt = 0 \text{ alors } f_{[a,b]} = 0$$

Définition 4 *Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$, on définit :*

$$\begin{cases} \int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f(t)dt \text{ si } a < b \\ \int_a^b f(t)dt = -\int_{[a,b]} f(t)dt \text{ si } b < a \end{cases}$$

*$\int_a^b f(t)dt$ est l'**intégrale** de f de a à b.*

On a ainsi :

Propriété 5 *Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, alors :*

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

et la célèbre :

Propriété 6 (Relation de Chasles) *Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b] \cup [b, c]$ alors :*

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

L'application qui a une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ associe son intégrale est linéaire :

Propriété 7 *Si les fonctions f et g sont continues par morceaux sur $[a, b]$ et λ, μ sont des réels alors :*

$$\int_{[a,b]} (\lambda f(t)dt + \mu g(t))dt = \lambda \int_{[a,b]} f(t)dt + \mu \int_{[a,b]} g(t)dt$$

$$\int_a^b (\lambda f(t)dt + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$$

4 Primitives

Faisons le lien avec les primitives.

Théorème 3 *Étant donné une fonction continue sur un intervalle I et a un point de I.*

1. *La fonction $x \to \int_a^x f(t).dt$ est l'unique primitive de f sur I nulle en a.*
2. *Si F est une primitive de f sur I alors, pour tout x de I :*

$$F(x) = \int_a^x f(t).dt + F(a)$$

3. *F est une primitive de f sur I, et si a et b sont 2 points de I alors :*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$$

On peut réécrire ce théorème sous la forme :

Propriété 8 *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et a un point de I alors, pour tout $x \in I$:*

$$f(x) = \int_a^x f'(t)dt + f(a)$$

5 Outils de calcul

Rappel : le tableau des primitives classiques (à connaitre par coeur !) :

Fonction f	Primitive F	Domaine de validité
x^n	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^p}$	$-\dfrac{1}{p-1}\dfrac{1}{x^{p-1}}$	$p \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^*$
x^α	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$, $x \in \mathbb{R}_+*$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$	$x \in \mathbb{R}^*$
e^x	e^x	
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	
$\tan(x)$	$-\ln(\|\cos(x)\|)$	$\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k.\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\mathrm{th}(x)$	$\ln(\mathrm{ch}(x))$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$-1 < x < 1$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	

On rappelle :

Théorème 4 (Intégration par parties) *Soit f et g 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I = [a, b]$. On a :*

$$\int_a^b f'(t).g(t)dt = [f(t).g(t)]_a^b - \int_a^b f(t).g'(t)dt$$

On peut aussi écrire :

Théorème 5 (Intégration par parties) *Si f est une fonction continue, F est une primitive de f, et g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I = [a, b]$. On a :*

$$\int_a^b f(t).g(t)dt = [F(t).g(t)]_a^b - \int_a^b F(t).g'(t)dt$$

Autre rappel :

Théorème 6 (Changement de variable) *Soit f une fonction continue sur un segment I et une fonction ϕ à valeurs dans I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, avec $a = \phi(\alpha)$ et $b = \phi(\beta)$ alors :*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)du$$

On dit qu'on a fait le changement de variable $t = \phi(u)$ dans l'intégrale de f.

Il faut, pour faire le changement de variable :

- "remplacer" t par $\phi(u)$;
- "remplacer" dt par $\phi'(u)du$;
- "remplacer" a par α, b par β.

Si le changement de variable est donné sous la forme : $u = \phi(t)$, il convient d'adapter la formule précédente en s'assurant du caractère bijectif de ϕ, du fait que ϕ^{-1} est $\mathcal{C}^1$ et poser : $t = \phi^{-1}(u)$.

6 Formules de Taylor

A l'aide d'intégrales, on montre les différentes formules de Taylor, déjà en partie vues dans le chapitre sur les développements limités.

Théorème 7 (Formule de Taylor avec reste intégral) *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a, b]$ alors :*

$$f(b) = f(a) + f'(a).(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2}.(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx$$

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx$$

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a, a+h]$ alors :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \frac{f^{(2)}(a)}{2}.h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.h^n + \int_0^h \frac{(h-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+x)dx$$

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \int_0^h \frac{(h-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+x)dx$$

Dans la formule précédente, on note souvent :

$$T_{n,a}(h) = f(a) + f'(a).h + \frac{f^{(2)}(a)}{2}.h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.h^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k$$

$T_{n,a}(h)$ est le **polynôme de Taylor** à l'ordre n de f en a. C'est un polynôme de degré au plus n de la variable h.

$$R_{n,a}(h) = \int_0^h \frac{(h-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+x)dx$$

$R_n(a)$ est le **reste intégral** à l'ordre n de f en a.
On a ainsi (si f est C^{n+1}) :

$$f(a+h) = T_{n,a}(h) + R_{n,a}(h)$$

Rappelons alors le théorème de Taylor Young :

Théorème 8 (Formule de Taylor-Young) *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a alors elle admet un développement limité à l'ordre n en a. Plus précisément :*

$$f(a+h) = f(a)+f'(a).h+\frac{f^{(2)}(a)}{2}.h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.h^n+o_{h\to 0}(h^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k+o_{h\to 0}(h^n)$$

ou, en notation différentielle :

$$f(a+h) = f(a)+\frac{df}{dx}(a).h+\frac{\frac{d^2f}{dx^2}(a)}{2}.h^2+\cdots+\frac{\frac{d^nf}{dx^n}(a)}{n!}.h^n+o_{h\to 0}(h^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{d^kf}{dx^k}(a)}{k!}.h^k+o_{h\to 0}(h^n)$$

Enfin l'inégalité de Taylor Lagrange :

Théorème 9 (Inégalité de Taylor-Lagrange) *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $[a,b]$ alors :*

$$\left| f(b) - \left(f(a) + f'(a).(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2}.(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(b-a)^n \right) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{Sup}_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$$

ou, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $[a,a+h]$:

$$|f(a+h) - T_{n,a}(h)| \leq \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{Sup}_{[a,a+h]} |f^{(n+1)}|$$

Dit autrement :
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle $[a,a+h]$:

$$f(a+h) = T_{n,a}(h) + R_{n,a}(h)$$

où $T_{n,a}$ est le polynôme de Taylor en a à l'ordre n et $h \to R_{n,a}(h)$ est le reste qui vérifie :

$$|R_{n,a}(h)| \leq \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{Sup}_{[a,a+h]} |f^{(n+1)}|$$

7 Méthodes numériques

Dans cette section, on considère une fonction réelle f définie et continue et continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ $(a < b)$. L'objectif est de trouver des valeurs approchées du réel $\int_{[a,b]} f(t)dt$

7.1 Méthode des rectangles

On considère n un entier. On pose : $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour $(0 \leq k \leq n)$. Les points a_k correspondent à une subdivision du segment $[a,b]$ en n segments de longueurs égales. Le fait d'approximer la fonction f par ses valeurs aux extrémités de chacun des segments précédents conduit, pour ce qui est du calcul de l'intégrale à poser :

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k), \quad v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

Les suites (u_n) et (v_n) s'appelle les **sommes de Riemann** de la fonction f. On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 10 (Riemann) *Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\int_a^b f(t)dt$.*

7.2 Méthode des trapèzes

On considère n un entier. On pose toujours : $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ pour $(0 \leq k \leq n)$. Le fait d'approximer la fonction f par des fonctions affines sur chacun des segments précédents conduit, pour ce qui est du calcul de l'intégrale à poser :

$$t_n = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(a_k) + f(a_{k+1})) = \frac{u_n + v_n}{2}$$

Théorème 11 *La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_{[a,b]} f(t)dt$.*

Il peut être intéressant de calculer plutôt $t_n = t_{2^n}$ que t_n, le calcul utilisant les résultats des étapes précédentes

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoirs

Primitives de base.
Inégalité triangulaire.

Formules de l'intégration par parties et du changement de variable.
Formules de Taylor (divers versions).
Formules de Riemann.

Savoir-faire

Calculer une primitive d'une fraction simple éventuellement par décomposition en éléments simples et changement de variable classique.
Calculer une intégrale simple par calcul de primitive, intégration par parties, changement de variable.