Fiche 66 : Intégration.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Exercice 2

Déterminer les fonctions continues f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\int_a^b f(t)dt = (b-a)\sup\limits_{[a,b]} |f|$.

Exercice 3

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ telle que $f(a) = a$.

Exercice 4

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. On définit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que si f est périodique, g admet une limite en $+\infty$.

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire $1/(n+1)$ comme une intégrale simple pour déterminer :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Exercice 6

On considère la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

1. Déterminer le sens de variation de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et montrer que $I_n \to 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $1 - I_n$, faire une intégration par parties et en déduire que :

$$I_n = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$