Fiche 64 bis : Matrices.

Exercice 1

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\mathrm{rg}(A)$, $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$.
2. Vérifier que $E_1 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base.
3. Vérifier que $E_2 = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / MA = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base.

Exercice 2

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, on définit :

$$\exp A = \sum_{i \geq 0} \frac{A^i}{i!},$$

la somme étant finie et s'arrêtant par exemple au premier indice i tel que $A^i = 0$.

1. Montrer que si A et B sont nilpotentes et commutent, alors $(A + B)$ est aussi nilpotente.
   et que dans ce cas $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
2. En déduire que $\exp(A)$ est toujours inversible et calculer son inverse.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Déterminer $\exp(A)$ et $\exp(B)$.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on rappelle que Tr est une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Rappeler la dimension de l'espace $E = \ker(\mathrm{Tr}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner une base de E formée de matrices de la forme $AB - BA$.
2. Soit $f \in M_n(\mathbb{R})^*$ telle que $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2 : f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f = \alpha \mathrm{tr}$.