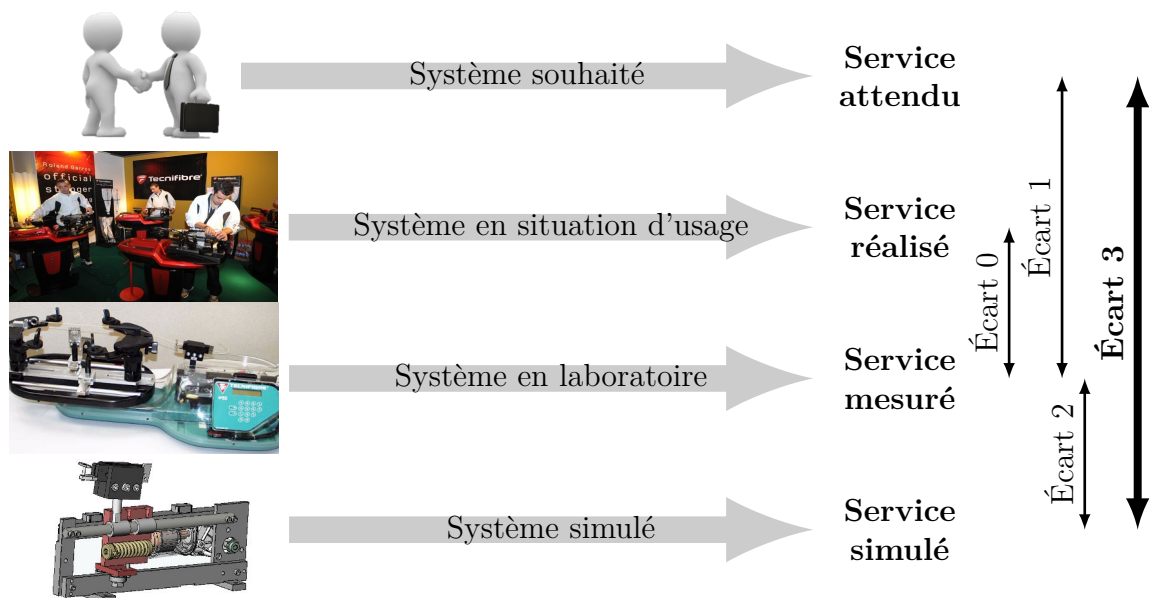


Modélisation et étude des équilibres statiques

— *Éléments de correction des TDs* —



Écart 0 – évalue la fiabilité et la fidélité du système de laboratoire didactisé par rapport au système réel. Il répond aux questions « le système de laboratoire est-il représentatif du système réel ? Permet-il de l'étudier de manière fiable ? »

Écart 1 – évalue le respect du CDCF par le système réel sur prototype instrumenté en laboratoire. Il répond à la question « le système réalisé, répond-il au CDCF ? ».

Écart 2 – évalue la fiabilité du modèle et de ses hypothèses. Il répond à la question « le modèle est-il correct ? ».

Écart 3 – évalue, en phase de conception, le respect du CDCF à partir d'un modèle simulé. Il répond à la question « le modèle du système satisfait-il les exigences du CDCF ? ».

Activités de TD

Exercices

Exercice 1 – Système élévateur de rack.....	3
Exercice 2 – Boîtier de direction.....	6
Exercice 4 – Glissière de cellule d’injection plastique	10
Exercice 7 – Excavatrice.....	13



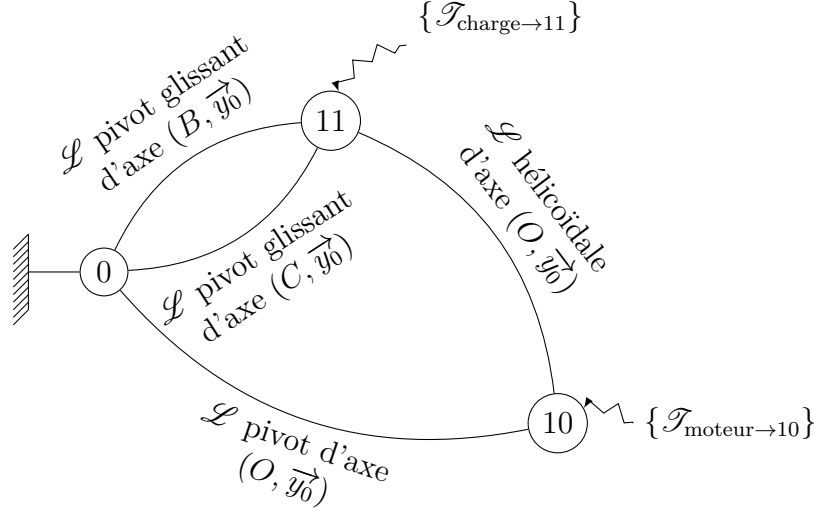
Nicolas Mesnier, lycée Jean Perrin, Lyon
Compléments & mises à jour sur le site des MPSI
<https://cahier-de-prepa.fr/mpsi-perrin>

— Version du 8 avril 2025 —

— EXERCICE 1 —

Système élévateur de rack

Question 1.1. D'après le schéma cinématique et les actions mécaniques donnés, il vient le graphe de structure suivant :



Question 1.2. Par cours, il vient les expressions canoniques des torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons :

— liaison pivot d'axe $(O, \vec{y}_0)$:

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 10}\} = {}_O \begin{Bmatrix} X_0 \vec{x}_0 + Y_0 \vec{y}_0 + Z_0 \vec{z}_0 \\ L_0 \vec{x}_0 + N_0 \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

— liaison pivot glissant d'axe $(B, \vec{y}_0)$:

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\oplus}\} = {}_B \begin{Bmatrix} X_B \vec{x}_0 + Z_B \vec{z}_0 \\ L_B \vec{x}_0 + N_B \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

— liaison pivot glissant d'axe $(C, \vec{y}_0)$:

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\ominus}\} = {}_C \begin{Bmatrix} X_C \vec{x}_0 + Z_C \vec{z}_0 \\ L_C \vec{x}_0 + N_C \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

— liaison hélicoïdale d'axe $(O, \vec{y}_0)$ et de pas p à droite :

$$\{\mathcal{T}_{10 \rightarrow 11}\} = {}_O \begin{Bmatrix} X \vec{x}_0 + Y \vec{y}_0 + Z \vec{z}_0 \\ L \vec{x}_0 - \frac{p}{2\pi} Y \vec{y}_0 + N \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

vérifiant bien $\dim(\text{Vect}(\{\mathcal{T}_{10 \rightarrow 11}\})) = 5$.

Question 1.3. Par changement de point, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}} &= \overrightarrow{M_{B,0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}} \wedge \overrightarrow{BO} \\ &= L_B \overrightarrow{x_0} + N_B \overrightarrow{z_0} + (X_B \overrightarrow{x_0} + Z_B \overrightarrow{z_0}) \wedge (a \overrightarrow{x_0} - \mu \overrightarrow{y_0}) \\ &= (L_B + \mu Z_B) \overrightarrow{x_0} + a Z_B \overrightarrow{y_0} + (N_B - \mu X_B) \overrightarrow{z_0}\end{aligned}$$

d'où

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\} = \begin{matrix} o \\ \left\{ \begin{array}{c} X_B \overrightarrow{x_0} + Z_B \overrightarrow{z_0} \\ (L_B + \mu Z_B) \overrightarrow{x_0} + a Z_B \overrightarrow{y_0} + (N_B - \mu X_B) \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\} \end{matrix}$$

Par une démarche identique et sachant $\overrightarrow{CO} = -a \overrightarrow{x_0} - \mu \overrightarrow{y_0}$, procédant aux changements de variables

$$B \rightarrow C \quad \text{et} \quad a \rightarrow -a$$

il vient :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\} = \begin{matrix} o \\ \left\{ \begin{array}{c} X_C \overrightarrow{x_0} + Z_C \overrightarrow{z_0} \\ (L_C + \mu Z_C) \overrightarrow{x_0} - a Z_C \overrightarrow{y_0} + (N_C - \mu X_C) \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\} \end{matrix}$$

Avant de poursuivre, on peut remarquer que $\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}$ est caractéristique d'une liaison glissière de direction $\overrightarrow{y_0}$ avec

$$\dim \left(\text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}) \right) = \dim \left(\text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\}) \cup \text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}) \right) = 5$$

tel que le degré d'hyperstatisme soit

$$\begin{aligned}h &= \dim \left(\text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\}) \right) + \dim \left(\text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}) \right) - \dim \left(\text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\}) \cup \text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}) \right) \\ &= \dim \left(\text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{B}}\}) \cap \text{Vect}(\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 11}^{\textcircled{C}}\}) \right) = 3\end{aligned}$$

et corresponde au nombre de paramètres géométriques à fixer pour s'assurer que les deux droites affines, axes des liaisons pivot glissant, soient parallèles et non confondues.

Question 1.4. Pour déterminer une expression de C_m en fonction de P on peut :

1. isoler **10** et écrire l'équation de moment autour de la droite $(O, \overrightarrow{y_0})$, c'est-à-dire selon la mobilité en rotation permise par la liaison pivot $\mathcal{L}_{0-10}$, de laquelle on tire une expression du type $C_m = f(Y)$;
2. isoler **11** et écrire l'équation de résultante dans la direction $\overrightarrow{y_0}$, c'est-à-dire selon les mobilités en translation permises par les deux liaisons pivot glissant d'axes parallèles, de laquelle on tire une expression du type $Y = g(P)$;
3. par composition des résultats, on tire une expression du type

$$C_m = f \circ g(P)$$

Mise en œuvre de la stratégie :

1. On isole **10** en équilibre dans un référentiel supposé galiléen et on lui applique le principe fondamental de la statique. En particulier, l'équation de moment autour de l'axe $(O, \vec{y}_0)$ donne :

$$/ (O, \vec{y}_0) : \quad \underbrace{\overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 10}} \cdot \vec{y}_0}_{0 \text{ (pivot } \mathcal{L}_{0-10})} + \overrightarrow{M_{O,11 \rightarrow 10}} \cdot \vec{y}_0 + C_m = 0$$

Avec, par théorème d'actions réciproques

$$\overrightarrow{M_{O,11 \rightarrow 10}} \cdot \vec{y}_0 = -\overrightarrow{M_{O,10 \rightarrow 11}} \cdot \vec{y}_0 = \frac{p}{2\pi} Y$$

il vient

$$C_m + \frac{p}{2\pi} Y = 0 \iff \boxed{C_m = \frac{-p}{2\pi} Y}$$

2. On isole **11** en équilibre dans un référentiel supposé galiléen et on lui applique le principe fondamental de la statique. En particulier, l'équation de résultante dans la direction $\vec{y}_0$ donne :

$$/ \vec{y}_0 : \quad \underbrace{\overrightarrow{F_{0 \rightarrow 11}^{(B)}} \cdot \vec{y}_0}_0 + \underbrace{\overrightarrow{F_{0 \rightarrow 11}^{(C)}} \cdot \vec{y}_0}_0 + \overrightarrow{F_{10 \rightarrow 11}} \cdot \vec{y}_0 - P = 0$$

il vient

$$\boxed{Y = P}$$

3. Par substitution, il vient finalement :

$$\boxed{C_m = \frac{-p}{2\pi} P}$$

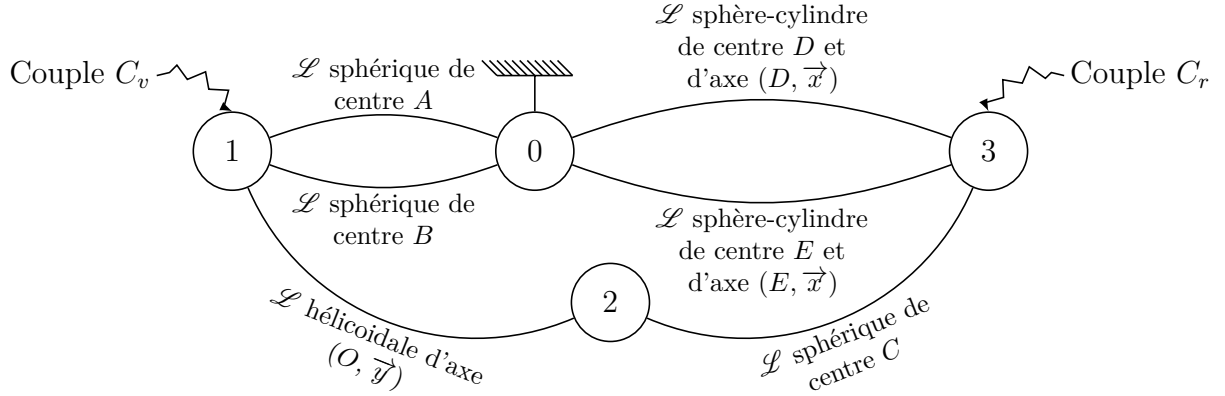
Question 1.5. Avec $p = 2\pi \text{ mm} = 2\pi \times 10^{-3} \text{ m}$ et $P = 100 \text{ N}$, il vient :

$$\boxed{C_m = -0,1 \text{ N}\cdot\text{m}}$$

— EXERCICE 2 —

Boîtier de direction

Question 2.1. D'après le schéma cinématique et les actions mécaniques donnés, il vient le graphe de structure suivant :



Question 2.2. 1. On isole **1** en équilibre dans un référentiel supposé galiléen. Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison sphérique de centre A :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}}\} = \begin{Bmatrix} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

— liaison sphérique de centre B :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{B}}\} = \begin{Bmatrix} X_B \vec{x} + Y_B \vec{y} + Z_B \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

— liaison hélicoïdale d'axe $(O, \vec{y})$ et de pas réduit $p^* = p/(2\pi)$ à droite :

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} \vec{x} + Y_{21} \vec{y} + Z_{21} \vec{z} \\ L_{21} \vec{x} - p^* Y_{21} \vec{y} + N_{21} \vec{z} \end{Bmatrix}_O$$

— couple d'entrée

$$\star \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_v \vec{y} \end{Bmatrix}$$

On applique le principe fondamental de la statique

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{A}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^{\textcircled{B}}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} + \star \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_v \vec{y} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

L'équation de résultante, en projection dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ donne :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : \quad 0 &= X_A + X_B + X_{21} \\ / \vec{y} : \quad 0 &= Y_A + Y_B + Y_{21} \\ / \vec{z} : \quad 0 &= Z_A + Z_B + Z_{21} \end{aligned}$$

Par changement de point, il vient en O :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 1}^{(A)}} &= \overrightarrow{M_{A,0 \rightarrow 1}^{(A)}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 1}^{(A)}} \wedge \overrightarrow{AO} \\ &= (X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z}) \wedge -y_A \vec{y} \\ &= y_A (Z_A \vec{x} - X_A \vec{z}) \end{aligned}$$

et de façon similaire, avec le changement de variable $A \rightarrow B$, il vient :

$$\overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 1}^{(B)}} = y_B (Z_B \vec{x} - X_B \vec{z})$$

d'où l'équation de moment au point O en projection dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\begin{aligned} /(O, \vec{x}) : \quad 0 &= y_A Z_A + y_B Z_B + L_{21} \\ /(O, \vec{y}) : \quad &\boxed{0 = C_v - p^* Y_{21}} \\ /(O, \vec{z}) : \quad 0 &= -y_A X_A - y_B X_B + N_{21} \end{aligned}$$

2. On isole **2** en équilibre dans un référentiel supposé galiléen. Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison sphérique de centre C :

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 2}\}_C = \left\{ \begin{array}{c} X_C \vec{x} + Y_C \vec{y} + Z_C \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} X_C \vec{x} + Y_C \vec{y} + Z_C \vec{z} \\ x_C (-Z_C \vec{y} + Y_C \vec{z}) \end{array} \right\}_O$$

obtenu par changement de point :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,3 \rightarrow 2}} &= \overrightarrow{M_{C,3 \rightarrow 2}} + \overrightarrow{F_{3 \rightarrow 2}} \wedge \overrightarrow{CO} \\ &= (X_C \vec{x} + Y_C \vec{y} + Z_C \vec{z}) \wedge -x_C \vec{x} \\ &= x_C (-Z_C \vec{y} + Y_C \vec{z}) \end{aligned}$$

— liaison hélicoïdale d'axe $(O, \vec{y})$ et de pas réduit $p^* = p/(2\pi)$ à droite :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}_O = \left\{ \begin{array}{c} -X_{21} \vec{x} - Y_{21} \vec{y} - Z_{21} \vec{z} \\ -L_{21} \vec{x} + p^* Y_{21} \vec{y} - N_{21} \vec{z} \end{array} \right\}$$

On applique le principe fondamental de la statique

$$\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

L'équation de résultante, en projection dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ donne :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : & \quad 0 = X_C - X_{21} \\ / \vec{y} : & \quad 0 = \boxed{Y_C - Y_{21}} \\ / \vec{z} : & \quad 0 = Z_C - Z_{21} \end{aligned}$$

L'équation de moment au point C en projection dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\begin{aligned} /(C, \vec{x}) : & \quad 0 = -L_{21} \\ /(C, \vec{y}) : & \quad 0 = -x_C Z_C + p^* Y_{21} \\ /(C, \vec{z}) : & \quad 0 = x_C Y_C - N_{21} \end{aligned}$$

3. On isole **3** en équilibre dans un référentiel supposé galiléen. Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison sphérique de centre C :

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\}_C = \begin{Bmatrix} -X_C \vec{x} - Y_C \vec{y} - Z_C \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

— liaison sphère-cylindre de centre D et d'axe $(D, \vec{x})$:

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\textcircled{D}}\}_D = \begin{Bmatrix} Y_D \vec{y} + Z_D \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

— liaison sphère-cylindre de centre E et d'axe $(E, \vec{x})$:

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\textcircled{E}}\}_E = \begin{Bmatrix} Y_E \vec{y} + Z_E \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

— couple de sortie

$$\star \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_r \vec{x} \end{Bmatrix}$$

On applique le principe fondamental de la statique

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\textcircled{D}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 3}^{\textcircled{E}}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3}\} + \star \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_r \vec{x} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

L'équation de résultante, en projection dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ donne :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : & \quad 0 = -X_C \\ / \vec{y} : & \quad 0 = -Y_C + Y_D + Y_E \\ / \vec{z} : & \quad 0 = -Z_C + Z_D + Z_E \end{aligned}$$

Par changement de point, il vient en D :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_{D,0 \rightarrow 3}^{(E)}} &= \overrightarrow{M_{E,0 \rightarrow 3}^{(E)}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 3}^{(E)}} \wedge \overrightarrow{ED} \\
&= (Y_E \overrightarrow{y} + Z_E \overrightarrow{z}) \wedge (x_D - x_E) \overrightarrow{x} \\
&= (x_D - x_E) (Z_E \overrightarrow{y} - Y_E \overrightarrow{z}) \\
\overrightarrow{M_{D,2 \rightarrow 3}} &= \overrightarrow{M_{C,2 \rightarrow 3}} + \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 3}} \wedge \overrightarrow{CD} \\
&= -(X_C \overrightarrow{x} + Y_C \overrightarrow{y} + Z_C \overrightarrow{z}) \wedge [(x_D - x_C) \overrightarrow{x} + k \overrightarrow{z}] \\
&= -k Y_C \overrightarrow{x} + (k X_C - (x_D - x_C) Z_C) \overrightarrow{y} + (x_D - x_C) Y_C \overrightarrow{z}
\end{aligned}$$

d'où l'équation de moment au point D en projection dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$:

$$\begin{aligned}
/(D, \overrightarrow{x}) : \quad & \boxed{0 = -k Y_C + C_r} \\
/(D, \overrightarrow{y}) : \quad & 0 = (x_D - x_E) Z_E + k X_C - (x_D - x_C) Z_C \\
/(D, \overrightarrow{z}) : \quad & 0 = -(x_D - x_E) Y_E + (x_D - x_C) Y_C
\end{aligned}$$

Question 2.3. À partir des 3 équations mises en évidence, c'est-à-dire :

— pour **1** isolé, équation de moment autour de l'axe $(O, \overrightarrow{y})$

$$C_v = p^* Y_{21}$$

— pour **2** isolé, équation de résultante dans la direction $\overrightarrow{y}$

$$Y_C = Y_{21}$$

— pour **3** isolé, équation de moment autour de l'axe $(D, \overrightarrow{x})$

$$C_r = k Y_C$$

puis par simples substitutions successives, il vient

$$\boxed{C_r = \frac{k}{p^*} C_v}$$

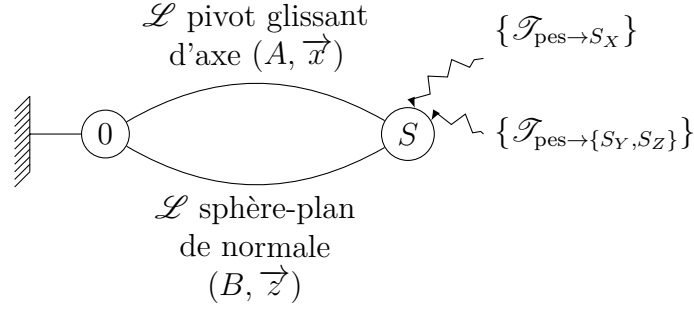
Des 15 autres équations, on tire les inconnues d'actions mécaniques effectivement transmises par les liaisons, non demandées.

Question 2.4. Pour trouver le plus rapidement possible une relation entre C_r et C_v , il est nécessaire d'exploiter les mobilités des liaisons. En particulier, il est nécessaire de remarquer que c'est la translation de **2** par rapport à **1** dans la direction $\overrightarrow{y}$ qui induit la rotation de **3** par rapport à **0** autour de la droite (DE) , translation elle-même induite, par l'intermédiaire de la liaison hélicoïdale, par la rotation de **1** par rapport à **0** autour de la droite (AB) . Avec ces éléments, il est clair qu'il faut :

- isoler **1** : équation de moment autour de l'axe $(O, \overrightarrow{y})$, associée à la rotation autour de (AB) ;
- isoler **2** : équation de résultante dans la direction $\overrightarrow{y}$, associée à la translation dans la direction $\overrightarrow{y}$;
- isoler **3** : équation de moment autour de l'axe $(D, \overrightarrow{x})$, associé à la rotation autour de (DE) .

Glissière de cellule d'injection plastique

Question 4.1. D'après les données du sujet, il vient le graphe de structure suivant :



Question 4.2. On isole l'ensemble S . Bilan des actions mécaniques extérieures :

— liaison pivot glissant d'axe $(A, \vec{x})$:

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{A}}\} = \begin{Bmatrix} Y_A \vec{y} + Z_A \vec{z} \\ M_A \vec{y} + N_A \vec{z} \end{Bmatrix}_A$$

— liaison sphère-plan de normale $(B, \vec{z})$:

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}\} = \begin{Bmatrix} Z_B \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

— action de la pesanteur sur le module S_X :

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S_X}\} = \begin{Bmatrix} -M_X g \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_X}$$

— action de la pesanteur sur l'ensemble mobile $\{S_Y, S_Z\}$:

$$\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \{S_Y, S_Z\}}\} = \begin{Bmatrix} -M_{YZ} g \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_{YZ}}$$

Question 4.3. $S = \{S_X, S_Y, S_Z\}$ est en équilibre dans un référentiel galiléen. On lui applique le principe fondamental de la statique :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{A}}\} + \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}\} + \{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow S_X}\} + \{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \{S_Y, S_Z\}}\} = \{0\}$$

Équation de résultante :

$$\begin{aligned} / \vec{x} : \quad & 0 = 0 \\ / \vec{y} : \quad & 0 = Y_A \\ / \vec{z} : \quad & 0 = Z_A + Z_B - (M_X + M_{YZ}) g \end{aligned}$$

Pour écrire l'équation de moment au point A , on exprime par changement de point les moments au point A :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{A,0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}} &= \overrightarrow{M_{B,0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}} + \overrightarrow{F_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}} \wedge \overrightarrow{BA} \\ &= Z_B \overrightarrow{z} \wedge E \overrightarrow{y} \\ &= -EZ_B \overrightarrow{x}\end{aligned}$$

Procédant aux simples changements de variables $Z_B \rightarrow -M_X g$ et $E \rightarrow a$ et $Z_B \rightarrow -M_{YZ} g$ et $E \rightarrow -CY$, il vient immédiatement :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{A,\text{pes} \rightarrow S_X}} &= aM_X g \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{M_{A,\text{pes} \rightarrow \{S_Y, S_Z\}}} &= -CY M_{YZ} g \overrightarrow{x}\end{aligned}$$

d'où l'équation de moment au point A :

$$\begin{aligned}/(A, \overrightarrow{x}) : \quad 0 &= -EZ_B + aM_X g - CY M_{YZ} g \\ /(A, \overrightarrow{y}) : \quad 0 &= M_A \\ /(A, \overrightarrow{z}) : \quad 0 &= N_A\end{aligned}$$

Avec l'équation de moment autour de l'axe $(A, \overrightarrow{x})$, on trouve :

$$Z_B = g \frac{aM_X - CY M_{YZ}}{E} \implies \boxed{\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{B}}\}_B = \begin{Bmatrix} g \frac{aM_X - CY M_{YZ}}{E} \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}}$$

Exploitant ce résultat dans l'équation de résultante dans la direction $\overrightarrow{z}$, il vient :

$$Z_A = g \left[\left(1 - \frac{a}{E}\right) M_X + \left(1 + \frac{CY}{E}\right) M_{YZ} \right]$$

d'où

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow S}^{\textcircled{A}}\}_A = \begin{Bmatrix} g \left[\left(1 - \frac{a}{E}\right) M_X + \left(1 + \frac{CY}{E}\right) M_{YZ} \right] \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}}$$

Question 4.4. Le sens de l'effort exercé par la liaison sphère-plan dépend du signe de Z_B . Comme g et E sont positifs, il vient par application numérique :

$$aM_X - CY M_{YZ} = 0,2 \times 230 - 0,5 \times 120 = 46 - 60 = -14 \implies Z_B < 0$$

qui signifie que l'action de la liaison sphère-plan est dirigée vers le bas, selon $-\overrightarrow{z}$.

Question 4.5. Comme nous avons isolé S , l'action du rail **0** est transmise par le galet **9** si, et seulement si, son action est dirigée vers le bas, selon $-\overrightarrow{z}$, qui correspond à

$$Z_B < 0 \iff aM_X - CY M_{YZ} < 0 \iff \boxed{CY > a \frac{M_X}{M_{YZ}}}$$

et que l'on traduit en condition sur la position du centre de gravité de l'ensemble mobile $\{S_Y, S_Z\}$.

Question 4.6. Par application numérique, on a :

$$Z_B = \frac{g}{E} (aM_X - CYM_{YZ}) = \frac{9,81}{0,5} \times -14 \approx 274,7 \text{ N}$$

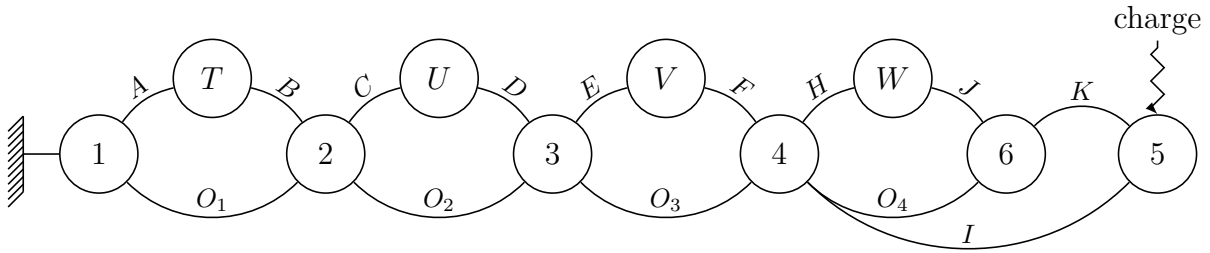
— EXERCICE 7 —

Excavatrice



Ces éléments de corrigé sont rédigés pour une seule configuration géométrique ; leur transposition à l'autre étant supposée évidente.

Question 7.1. Le mécanisme pouvant être représenté dans un plan de normale notée $\vec{z}$, on procède à une étude plane telle que chaque liaison pivot d'axe $(\square, \vec{z})$ soit simplement notée $\square$ sur le graphe de structure.

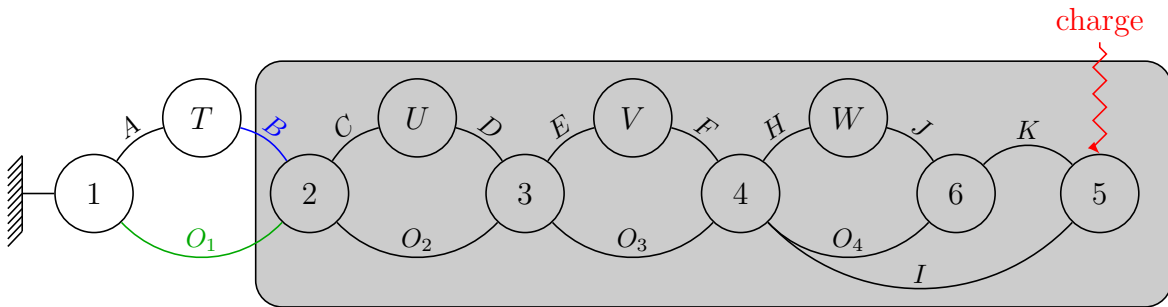


Notant que les vérins T , U , V et W sont chacun soumis à 2 glisseurs, il vient par théorème d'un solide soumis à deux glisseurs que les axes centraux des torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les vérins sont :

- $T : \Delta \overrightarrow{F_{T \rightarrow 2}} = (AB) ;$
- $U : \Delta \overrightarrow{F_{U \rightarrow 3}} = (CD) ;$
- $V : \Delta \overrightarrow{F_{V \rightarrow 4}} = (EF) ;$
- $W : \Delta \overrightarrow{F_{W \rightarrow 6}} = (GH) .$

Action mécanique développée par le vérin T

Pour déterminer l'action mécanique développée par le vérin T , on isole l'ensemble $S_T = \{2, 3, 4, 5, 6, U, V, W\}$ soumis à trois glisseurs :

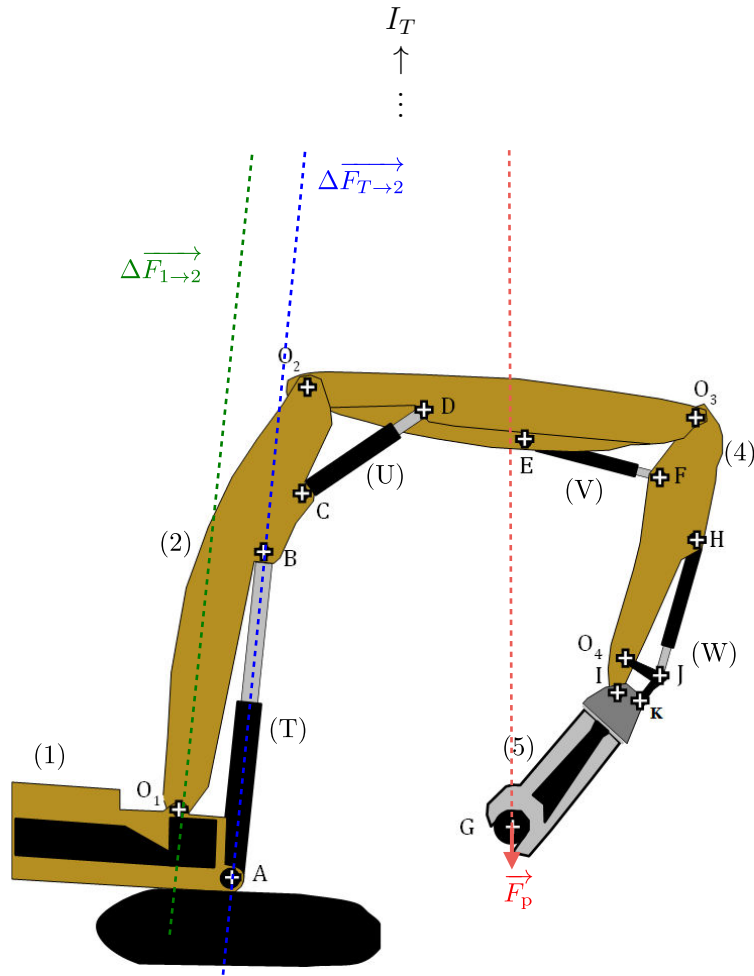


- l'action de la charge (connue) ; ↗
- l'action du vérin T (axe central connu) ; ↗ (AB)
- action de la liaison pivot avec **1** (glisseur au point O_1). ✕ O_1

Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de $\{\mathcal{T}_{\text{charge} \rightarrow 5}\}$ et $\{\mathcal{T}_{T \rightarrow 2}\}$ sont sécants au point I_T , alors les 3 axes centraux le sont en ce point ; ce qui permet de déterminer l'axe central de $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}$ comme la droite $(O_1 I_T)$. Au point I_T , il vient alors :

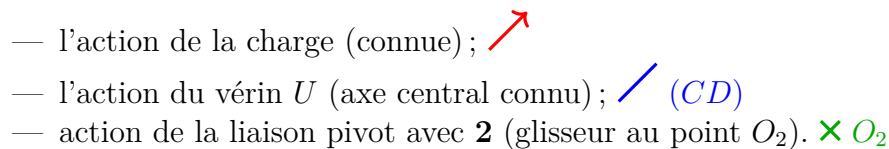
$${}_{I_T} \begin{Bmatrix} \vec{F}_p \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_{I_T} \begin{Bmatrix} \vec{F}_{T \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + {}_{I_T} \begin{Bmatrix} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Malheureusement, le document réponse n'est pas suffisamment grand dans cette configuration pour réaliser la construction.



Action mécanique développée par le vérin U

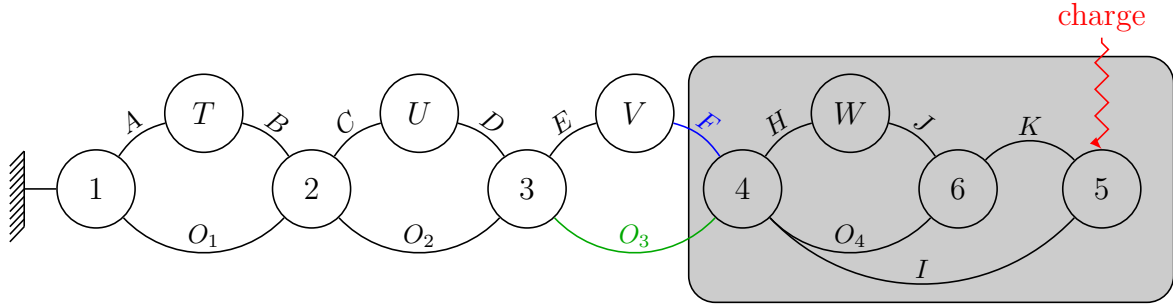
Pour déterminer l'action mécanique développée par le vérin U , on isole l'ensemble $S_U = \{3, 4, 5, 6, V, W\}$ soumis à trois glisseurs :


$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_p} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_U} + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{U \rightarrow 3}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_U} + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{F_{2 \rightarrow 3}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{I_U} = \{0\}$$
$$\vec{F}_p + \vec{F}_{U \rightarrow 3} + \vec{F}_{2 \rightarrow 3} = \vec{0}$$

The diagram illustrates a 3-DOF parallel robot mechanism. It consists of a fixed base (1) and three parallel arms (2), (3), and (4). The base is pivoted at point A. The first arm (2) is pivoted at point O₁ and has a pivot at point B. The second arm (3) is pivoted at point O₂ and has a pivot at point C. The third arm (4) is pivoted at point O₃ and has a pivot at point F. The arms are connected to a common platform (5) at points G, H, and I. The platform is pivoted at point J. The diagram shows the forces acting on the mechanism: a downward force $\vec{F}_p$ at point G, a downward force $\vec{F}_p$ at point I, and a downward force $\vec{F}_p$ at point J. The forces $\vec{F}_{2 \rightarrow 3}$ and $\vec{F}_{U \rightarrow 3}$ are shown as vectors originating from point G. The moment I_U is shown as a vector originating from point G. The diagram also shows the geometry of the mechanism, including the pivot points O₁, O₂, O₃, and J, and the points A, B, C, D, E, F, G, H, and I.

Action mécanique développée par le vérin V

Pour déterminer l'action mécanique développée par le vérin V , on isole l'ensemble $S_V = \{4, 5, 6, W\}$ soumis à trois glisseurs :



- l'action de la charge (connue); ↗
- l'action du vérin V (axe central connu); ↗ (EF)
- action de la liaison pivot avec **2** (glisseur au point O_3). ✕ O_3

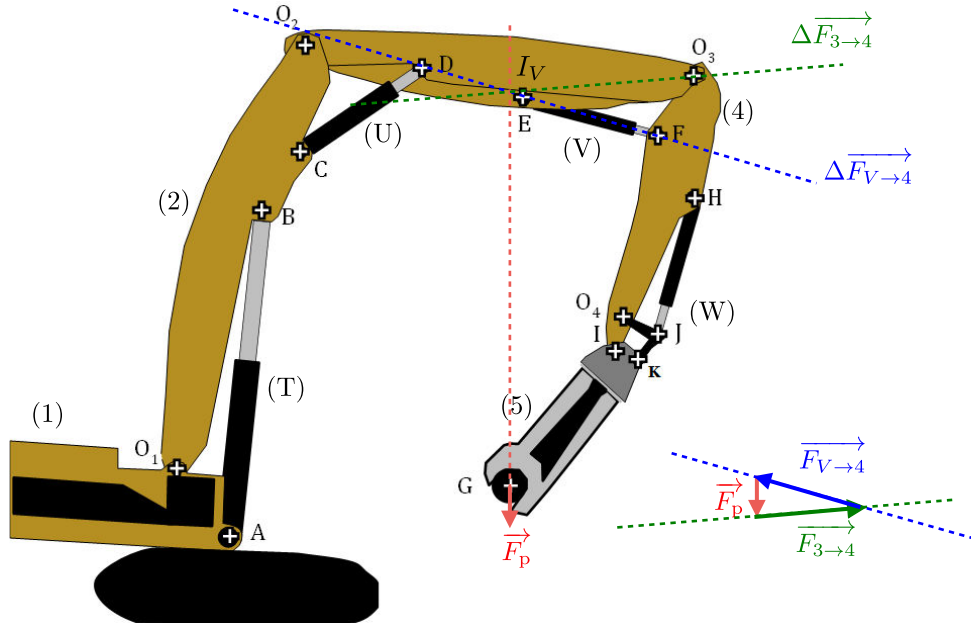
Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de $\{\mathcal{T}_{\text{charge} \rightarrow 5}\}$ et $\{\mathcal{T}_{V \rightarrow 4}\}$ sont sécants au point I_V , alors les 3 axes centraux le sont en ce point; ce qui permet de déterminer l'axe central de $\{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 4}\}$ comme la droite $(O_3 I_V)$. Après avoir tracé les 3 axes centraux, et sachant qu'au point I_V on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_p \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_V} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{V \rightarrow 4} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_V} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{3 \rightarrow 4} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_V} = \{0\}$$

il reste à réaliser graphiquement l'équation de résultante :

$$\vec{F}_p + \vec{F}_{V \rightarrow 4} + \vec{F}_{3 \rightarrow 4} = \vec{0}$$

qui se traduit par un triangle. Il vient alors les constructions suivantes.



Action mécanique développée par le vérin W

Pour déterminer l'action mécanique développée par le vérin W , il est nécessaire de procéder en deux temps :

1. on isole **5** soumis à trois glisseurs :

- l'action de la charge (connue); 
- l'action de **6** (axe central connu);  (KJ) (donné dans le sujet)
- action de la liaison pivot avec **4** (glisseur au point I).  I

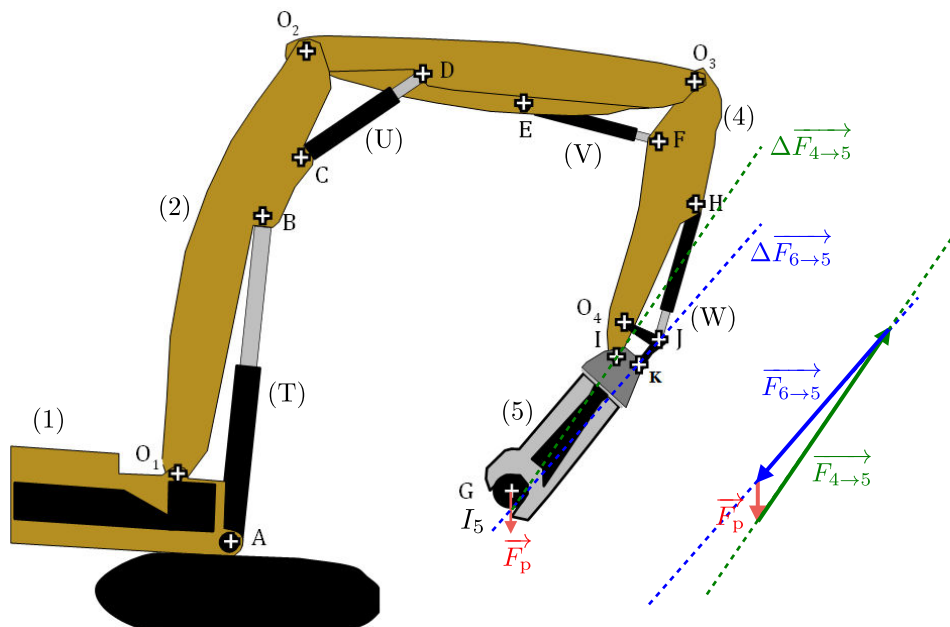
Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de $\{\mathcal{T}_{\text{charge} \rightarrow 5}\}$ et $\{\mathcal{T}_{6 \rightarrow 5}\}$ sont sécants au point I_5 , alors les 3 axes centraux le sont en ce point ; ce qui permet de déterminer l'axe central de $\{\mathcal{T}_{4 \rightarrow 5}\}$ comme la droite $(I_5 I)$. Après avoir tracé les 3 axes centraux, et sachant qu'au point I_5 on a :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_p \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_5} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{6 \rightarrow 5} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_5} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{4 \rightarrow 5} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_5} = \{0\}$$

il reste à réaliser graphiquement l'équation de résultante :

$$\overrightarrow{F_p} + \overrightarrow{F_{6 \rightarrow 5}} + \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 5}} = \overrightarrow{0}$$

qui se traduit par un triangle. Il vient alors les constructions suivantes.



2. on isole **6** soumis à trois glisseurs :

- l'action de **5** (connue); 
- l'action du vérin W (axe central connu);  (HJ)

— action de la liaison pivot avec 4 (glisseur au point O_4). $\times 0_4$

Par théorème d'un solide soumis à 3 glisseurs, les 3 axes centraux sont coplanaires et, comme les axes centraux de $\{\mathcal{T}_{5 \rightarrow 6}\}$ et $\{\mathcal{T}_{W \rightarrow 6}\}$ sont sécants au point J , alors les 3 axes centraux le sont en ce point ; ce qui permet de déterminer l'axe central de $\{\mathcal{T}_{4 \rightarrow 6}\}$ comme la droite $(O_4 J)$. Après avoir tracé les 3 axes centraux, et sachant qu'au point J on a :

$${}_J \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{5 \rightarrow 6}} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix} + {}_J \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{W \rightarrow 6}} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix} + {}_J \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 6}} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

il reste à réaliser graphiquement l'équation de résultante :

$$\overrightarrow{F_{5 \rightarrow 6}} + \overrightarrow{F_{W \rightarrow 6}} + \overrightarrow{F_{4 \rightarrow 6}} = \overrightarrow{0}$$

qui se traduit par un triangle. Il vient alors les constructions suivantes.

