Fiche 70 : Td du 17-04.

Exercice 1

On considère u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les noyaux : $\ker(A - 2I_3)$, $\ker(A + 2I_3)$ et $\ker(A - 4I_3)$.
2. Montrer que la réunion des 3 bases précédentes forme une base $\mathcal{B}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice P de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$.
3. Écrire la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}$ et vérifier qu'elle est diagonale. Préciser la relation qui lie P , P^{-1} , A et D (on ne demande pas de calculer P^{-1} ici).
4. Calculer, si n est un entier naturel non nul la matrice A^n .
5. Vérifier la relation : $A^3 - 4A^2 - 4A + 16I_3 = 0$. On pourra utiliser la matrice D .

Exercice 2

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ainsi que $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices dites *unipotentes* de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $U = I + N$ où $N \in \mathcal{N}$ et $I = I_3$ est la matrice identité de $\mathbb{R}^3$.

1. On pose

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

- (a) Déterminer $\ker(A - I)$ et en déduire un vecteur e_1 de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(e_1) = e_1$
- (b) Déterminer e_2 et e_3 dans $\mathbb{R}^3$ tel que

$$f(e_2) = 2e_1 + e_2 \quad , \quad f(e_3) = -2e_2 + e_3$$

- (c) En déduire une matrice P inversible tel que $A = PBP^{-1}$.
2. (a) Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et la dimension.
- (b) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- (c) Montrer que $\mathcal{U}$ est un sous groupe de $GL_3(\mathbb{R})$ où $GL_3(\mathbb{R})$ est le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ tel que $U = I + N$. On rappelle que U est inversible. .
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} N^2$$

On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ tel que défini est une notation, ce n'est pas une puissance.

- (a) Montrer cependant que si $n \in \mathbb{N}$ et U^n désigne la puissance *classique* alors

$$U^{(n)} = U^n$$

On pourra utiliser la formule du binôme.

- (b) Montrer si $n \in \mathbb{N}$ et U^{-n} désigne la puissance *classique* alors

$$U^{(-n)} = U^{-n}$$

- (c) Montrer que si α et β sont réels alors

$$U^{(\alpha)} \cdot U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad (U^{(\alpha)})^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$