Fiche 71 : Intégration.

Exercice 1

Soient $a < b$ réels, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues, f positive.
Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = g(c)\int_a^b f(t)\,dt$$

Exercice 2

Étudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{dx}{\sqrt{t^2+t+1}}$$

On établira son tableau de variations en montrant qu'elle admet en $+\infty$ et $-\infty$ des limites et un minimum sur $\mathbb{R}$ sans chercher à déterminer les valeurs de ces limites et de ce minimum.

Exercice 3

On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$G(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{t}$$

1. Déterminer G'.
2. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la limite de G en $+\infty$.
3. Étudier le comportement de $\int_x^{2x} \frac{(\cos(t)-1)\,\mathrm{d}t}{t}$ pour déterminer la limite de G en 0^+.

Exercice 4

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}^{(n+1)}}{\mathrm{d}x^{(n+1)}}\left(\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x)$$