

Chapitre 16 : Séries numériques.

Plan

1 Définitions de base	1
2 Séries à termes positifs	2
3 Écriture d'un nombre en base décimale	3
4 Convergence absolue	4
5 Séries alternées	4
6 Familles sommables de réels positifs	5
7 Familles sommables de complexes	6

1 Définitions de base

On considère : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.

Définition 1 Étudier la *série* de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qu'on note $\sum_{n \geq 0} u_n$, c'est étudier la suite dite des *sommes partielles* :

$$(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

On dit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ **diverge** ou **est divergente** si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

On dit que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ **converge** ou **est convergente** quand la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (vers une limite finie).

Dans ce cas, on pose :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Le nombre $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la **somme** de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

La suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}} = (S - \sum_{k=0}^{n-1} u_k)_{n \in \mathbb{N}} = (\sum_{k=n}^{+\infty} u_k)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des **restes** de la série. Elle tend vers 0.

Premières propriétés :

Propriété 1 Si on a une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ sont **de même nature**.

Propriété 2 Si la série de termes réels ou complexes $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge alors $u_n \rightarrow 0$.

Si on a pas $u_n \rightarrow 0$ alors on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **diverge grossièrement**.

Propriété 3 Si les séries à termes réels ou complexes $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ convergent et si λ et μ sont des réels ou des complexes, la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + \lambda v_n)$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

On peut du coup considérer l'espace vectoriel des séries convergentes et la forme linéaire qui à chaque série convergente associe sa somme.

Propriété 4 (Série Géométrique) Si z est un nombre complexe, la série $\sum_{n \geq 0} z^n$ (dite **série géométrique**) converge si et seulement si $|z| < 1$ et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

2 Séries à termes positifs

Le théorème des suites monotones permet d'étudier les séries à termes positifs de manière simplifiée.

Propriété 5 On considère deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$ à termes positifs. On a :

- La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq v_n = O(u_n)$ et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq v_n = O(u_n)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ diverge alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ diverge.
- Si $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} v_n$, les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ sont de même nature.

On considère une fonction f définie sur \mathbb{R}^+ continue décroissante et tendant vers 0 en $+\infty$ (du coup positive...).

Propriété 6 (Comparaison série intégrale) Dans les conditions précédentes, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

Du coup la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge si et seulement si la suite $(\int_0^n f(t) dt)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

On montre ainsi :

Propriété 7 (Séries de Riemann) Si α est un réel positif, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$ dite **série de Riemann** converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Une série convergente mais non absolument convergente est dite **semi convergente**

3 Écriture d'un nombre en base décimale

On peut dans ce cadre revenir sur l'écriture décimale (se généralise sans peine à l'écriture en base $b \in \{2, 3, \dots\}$) d'un réel :

Théorème 1 Si n est un entier naturel, il existe une unique suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\llbracket 0, 9 \rrbracket$, nulle à partir d'un certain rang $m + 1$, tel que :

$$n = \sum_{k \geq 0} b_k 10^k$$

On écrit du coup en base 10 : $n = b_m \dots b_1 b_0$

Théorème 2 Si α est un réel, il existe un unique entier n et une unique suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\llbracket 0, 9 \rrbracket$, non égale à 9 à partir d'un certain rang, tel que :

$$\alpha = n + \sum_{k \geq 1} \frac{a_k}{10^k}$$

On écrit du coup en base 10, en reprenant l'écriture de n : $\alpha = b_m \dots b_1 b_0, a_1 a_2 \dots$

Dans ces conditions, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des **décimales** de α .

4 Convergence absolue

On considère une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ à termes complexes.

Définition 2 La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est dite **absolument convergente** quand la série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.

Le théorème associé :

Théorème 3 Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est **absolument convergente** alors elle est convergente et dans ce cas :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

La réciproque est fautive !

Corollaire :

Propriété 8 Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ vérifie $u_n = O(v_n)$ et la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est absolument convergente alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente donc convergente.

En liaison avec le programme d'algèbre linéaire :

Propriété 9 Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont absolument convergentes et λ est un réel ou un complexe alors la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + \lambda v_n)$ est absolument convergente donc convergente et

$$\sum_{n \geq 0} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n \geq 0} u_n + \lambda \sum_{n \geq 0} v_n$$

On peut du coup considérer l'espace vectoriel des séries absolument convergentes et la forme linéaire qui à chaque série absolument convergente associe sa somme.

5 Séries alternées

On considère : $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels **décroissante** et **tendant vers 0**, du coup positive.

On s'intéresse à la série de terme général $(b_n = (-1)^n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dite alternée. Posons , pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} b_k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \text{ et } S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} b_k = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k$$

$$S_{2n} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{2n-1} + a_{2n}, \quad S_{2n+1} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1}$$

Théorème 4 (des séries alternées) La série : $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$ est convergente. On a de plus, si $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k = S_{2n+1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$$

Remarquons de plus que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes :

- La suite $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, si $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

- La suite $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, si $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$$

- On a

$$S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1} \rightarrow 0$$

Posons , pour $n \in \mathbb{N}$:

$$R_{2n} = \sum_{k=2n}^{+\infty} b_k = \sum_{k=2n}^{+\infty} (-1)^k a_k \text{ et } R_{2n+1} = \sum_{k=2n+1}^{+\infty} b_k = \sum_{k=2n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

$$R_{2n} = a_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} - \dots, \quad R_{2n+1} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \dots$$

Propriété 10 On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-a_{2n+1} \leq R_{2n+1} \leq 0 \leq R_{2n} \leq a_{2n}$$

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_n$$

6 Familles sommables de réels positifs

On considère un ensemble I fini ou infini et $(x_i)_{i \in I} \in [0, +\infty]^I$ une famille **positive**.

Définition 3 On pose

$$\sum_{I \in I} x_i = \sup_{J_f \subset I, J_f \text{ fini}} \left(\sum_{i \in J_f} x_i \right) \in \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup +\infty$$

La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite **sommable** ou **à somme finie** quand $\sum_{I \in I} x_i \in \mathbb{R}_+$.

Dans ce cas : toute sous famille est sommable et pour toute partie $J \subset I$:

$$\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$$

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $J_\epsilon \subset I$ fini tel que, pour toute partie J telle que $J_\epsilon \subset J \subset I$:

$$\sum_{i \in I} x_i - \epsilon \leq \sum_{i \in J_\epsilon} x_i \leq \sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$$

Si $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres positifs alors elle est sommable quand la série $(\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i)$ converge et les sommes de la série et de la famille coïncident.

Si $(x_i)_{i \in I}$, $(y_i)_{i \in I}$ sont 2 familles positives sommables et $\lambda > 0$ alors :

$$\sum_{i \in I} (x_i + \lambda y_i) = \sum_{i \in I} x_i + \lambda \sum_{i \in I} y_i$$

Propriété 11 (Somme par paquets) On considère ici que I est la réunion disjointe des ensembles (éventuellement infinis) (I_j) pour $j \in J$ et $(x_i)_{i \in I}$ une famille positive.

Alors la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si chacune des familles $(x_i)_{i \in I_j}$ pour j dans J est sommable et que de plus $(\sum_{i \in I_j} x_i)_{j \in J}$ est une famille sommable. Dans ce cas :

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} x_i \right)$$

Propriété 12 (Théorème de Fubini) Si I et J sont des ensembles (éventuellement infinis) et $(x_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ pour $j \in J$ une famille positive sommable, alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} x_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} x_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} x_{i,j} \right)$$

7 Familles sommables de complexes

On considère un ensemble I fini ou infini et $(z_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille de nombres réels ou complexes.

Définition 4 La famille $(z_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ est dite **sommable** quand la famille $(|z_i|)_{i \in I}$ l'est.

Dans ce cas il existe un nombre complexe noté $\sum_{i \in I} z_i$ tel que :

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $J_\epsilon \subset I$ fini tel que, pour toute partie J_f finie telle que $J_\epsilon \subset J_f \subset I$:

$$\left| \sum_{i \in I} z_i - \sum_{i \in J_f} z_i \right| \leq \epsilon$$

Dans ce cas :

$$\left| \sum_{i \in I} z_i \right| \leq \sum_{i \in I} |z_i|$$

Si $(z_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes alors elle est sommable quand la série $(\sum_{i \in \mathbb{N}} z_i)$ est **absolument** convergente et les sommes de la série et de la famille coïncident.

Les résultats sur les familles sommables s'appliquent donc sans difficultés aux séries **absolument** convergente. Il convient par contre d'être très prudent avec les séries semi convergentes.

Propriété 13 Si $(z_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ famille de nombres complexes vérifie, pour $i \in I : |z_i| \leq u_i$ et $(u_i)_{i \in I}$ est une famille positive sommable alors $(z_i)_{i \in I}$ est sommable et

$$\left| \sum_{i \in I} z_i \right| \leq \sum_{i \in I} |z_i| \leq \sum_{i \in I} u_i$$

Si $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}$ sont 2 familles de complexes sommables et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors :

$$\sum_{i \in I} (x_i + \lambda y_i) = \sum_{i \in I} x_i + \lambda \sum_{i \in I} y_i$$

Autrement dit, l'ensemble des familles sommables est un espace vectoriel complexe et la somme est une forme linéaire sur cet espace.

Propriété 14 (Somme par paquets) On considère ici que I est la réunion disjointe des ensembles (éventuellement infinis) (I_j) pour $j \in J$ et $(z_i)_{i \in I}$ une famille de complexes.

Alors la famille $(z_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si chacune des familles $(z_i)_{i \in I_j}$ pour j dans J est sommable et que de plus $(\sum_{i \in I_j} |z_i|)_{j \in J}$ est une famille sommable. Dans ce cas :

$$\sum_{i \in I} z_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} z_i \right)$$

Propriété 15 (Théorème de Fubini) Si I et J sont des ensembles (éventuellement infinis) et $(z_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ pour $j \in J$ une famille sommable, alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} z_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} z_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} z_{i,j} \right)$$

On utilise ces outils pour étudier les produits de séries de nombres complexes :

Théorème 5 (Produit de Cauchy de 2 séries de nombres complexes) Soit $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n)$ et $(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n)$ 2 séries absolument convergentes de nombres complexes.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$.
La série $(\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n)$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} \cdot b_k \right)$$

L'exponentielle complexe est une application importante :

Théorème 6 (Exponentielle complexe) Si z est un complexe la série $(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!})$ est absolument convergente et on pose

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Si z et z' sont 2 complexes, on montre :

$$\exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$$

Savoirs

Définition d'une série convergente. Séries géométriques, séries de Riemann, séries à termes positifs, série absolument convergente, séries alternées, familles sommables à termes positifs et familles sommables complexes. théorèmes des séries alternées, théorème de Fubini, somme de Cauchy, propriétés de base de l'exponentielle complexe.

Savoir-faire

Identifier une série convergente, une série absolument convergente, une famille sommable de réels positifs, une famille sommables de nombres complexes.