Fiche 73 : Séries.

Exercice 1

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.
On suppose que $\lim \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = l \in \mathbb{R}_+ \cup +\infty$.

1. Montrer que si $l < 1$, la série de terme général (u_n) converge.
2. Montrer que si $l > 1$, la série de terme général (u_n) diverge.
3. Montrer que si z est complexe avec $|z| < \frac{1}{l}$ alors la série de terme général $(u_n z^n)$ converge.
4. En déduire les conditions de convergence des séries (k est un entier relatif et z est un complexe) :

$$\sum_{n\geq 0} n^k z^n$$

Exercice 2

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge (on pourra étudier la suite des sommes partielles).
2. Démontrer que pour $n \to \infty$: $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Exercice 3

Montrer la convergence puis calculer, la somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Exercice 4

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}$$

Exercice 5

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$.

1. Après avoir justifié la convergence, calculer par produit de Cauchy : $\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2$ et en déduire $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$.
2. Calculer la valeur de : $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$