Fiche 74 : Séries.

Exercice 1

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs tels que, au voisinage de $+\infty$, on ait

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Montrer que la série de terme général $(\frac{1}{n^\alpha})$ est de ce type ; rappeler pour quelles valeurs de α elle converge.
2. Montrer que si $\alpha < 1$, la série de terme général (a_n) diverge, et que, si $\alpha > 1$, elle converge.
3. Application : étudier les séries

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.(2n).(2n+2)}.$$

et :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1.3.5\ldots.(2n-3)}{2.4.6.\ldots.(2n+2)}.$$

Exercice 2

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$. Montrer qu'il existe un réel a qu'on déterminera tel que :

$$\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On pourra utiliser la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

Calculer :

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$$

et donner un équivalent de $u_n - \ell$.
On pourra utiliser l'exercice précédent.