

## Fiche 76 : TD du 15-05.

### Exercice 1

Dans cet exercice, on s'intéresse à la série  $S$  de terme général  $\left(\frac{4(-1)^k}{2k+1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$  et du coup à la suite des sommes partielles définie par, si  $n \in \mathbb{N}$  :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{4(-1)^k}{2k+1}$$

1. La série  $S$  est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que la série  $S$  est convergente.

Dans la suite, on cherche à déterminer la valeur de sa somme  $S_\infty$ .

3. On pose, si  $x \in [0, 1]$ ,

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x^{2k} \text{ et } v_n(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k x^{2k}$$

Montrer que

$$v_n(x) \leq \frac{1}{1+x^2} \leq u_n(x)$$

4. Quelle est la valeur de  $S_\infty$  somme de la série  $S$  ?

### Exercice 2

Pour  $n \geq 1$ , on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

1. Démontrer que

$$u_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t} dt.$$

2. Démontrer alors que  $\sum u_n$  est convergente.
3. Démontrer que  $|u_n| \geq \frac{2}{(n+1)\pi}$  pour tout  $n \geq 1$ . En déduire que  $\sum_n u_n$  ne converge pas absolument.

### Exercice 3

Soit  $(p_k)_{k \geq 1}$  la suite ordonnée des nombres premiers. Le but de l'exercice est d'étudier la divergence de la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$ . Pour  $n \geq 1$ , on pose  $V_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$ .

1. Montrer que la suite  $(V_n)$  est convergente si et seulement si la suite  $(\ln V_n)$  est convergente.
2. En déduire que la suite  $(V_n)$  est convergente si et seulement si la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$  est convergente.
3. Démontrer que

$$V_n = \prod_{k=1}^n \left( \sum_{j \geq 0} \frac{1}{p_k^j} \right).$$

4. En déduire que  $V_n \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$ .
5. Quelle est la nature de la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$  ?
6. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , quelle est la nature de la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k^\alpha}$  ?