Fiche 77 : espaces euclidiens.

Exercice 1

Étudier la nature de la série :

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$$

Exercice 2

Soit E l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^4$, F le sous-espace vectoriel d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{cases}$$

1. Trouver une base orthonormée de F.
2. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur F.
3. Calculer $d(e_1, F)$ où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x \in E : \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 4

Soit $\alpha = \inf\left\{\int_0^1 (ax+b-e^x\ )^2\, dx : a, b \in \mathbb{R}\right\}$.

1. Déterminer un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(E, \mid)$, un sous-espace vectoriel F de E et $v \in E$ tel que $\alpha = \mathrm{d}(v, F)^2$.
2. Déterminer $p \in F$ tel que $\alpha = \mathrm{d}(v, p)^2$ et α.