

Fiche 78 : espaces euclidiens.

Exercice 1

Soit E un espace euclidien de dimension n . Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire de matrice U dans une base orthonormée $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $U.U^T$ est la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur $\text{Vect}(\vec{u})$.
2. Trouver la matrice de la symétrie associée.

Exercice 2

On pose $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

et de la norme associée.

1. Démontrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n \geq 0}$ formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque $n \in \mathbb{N} : P_n$ unitaire de degré n .
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
3. En déduire pour tout $n \geq 1$, l'existence de a_n et b_n tels que

$$P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_nP_{n-1}.$$

On considère g la fonction exponentielle sur $[0, 1]$.

4. Montrer que $g \notin \mathbb{R}[X]$.
5. Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales convergeant vers g pour la norme euclidienne.
6. En déduire que $\mathbb{R}[X]$ n'a pas de supplémentaire orthogonal dans E .