Fiche 79 : TD du 22-05.

Exercice

1. Montrer que dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$, on défini un produit scalaire par la formule

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(0)Q^{(n)}(0)}{(n!)^2}$$

2. Donner une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.

Problème 1

Soit f une fonction définie sur $]0,1]$, continue et décroissante sur $]0,1]$.
Attention : f n'est pas supposée dérivable sur $[0,1]$, les résultats du cours sur les sommes de Riemann ne s'appliquent pas ici.
On considère la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$r_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et la fonction I définie sur $]0,1]$ par : $\forall x \in]0,1]$, $I(x) = \int_x^1 f(t)dt$

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$ et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. En additionnant les inégalités précédentes, démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f(1) \leq r_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. On suppose, de plus, que $\lim_{x\to 0} I(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to 0} x.f(x) = 0$.
   Démontrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
4. Dans cette question, on pose, pour tout réel $x \in]0,1]$.

$$f(x) = -\ln(x)$$

   (a) Montrer que f satisfait les hypothèses des questions précédentes.

   (b) En utilisant les questions précédentes (sans utiliser la formule de Stirling), démontrer que la suite $\left(\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}\right)$ converge et déterminer sa limite.

Problème 2

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$$

Partie A : Intégrales de Wallis

1. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.
2. Montrer (on pourra procéder par intégrations par parties) que, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

3. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq \dfrac{W_n}{W_{n+1}} \leq \dfrac{n+2}{n+1}$.

   On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer sa valeur.
5. En déduire que pour $n \to \infty$:

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Partie B : Intégrale de Gauss

6. Montrer que pour $x \in]-1, +\infty[$, on a :

$$\ln(x+1) \leq x$$

7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq t \leq \sqrt{n}$:

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par le changement de variable $t = \sqrt{n}\cos(u)$ montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}\; W_{2n+1}$$

9. De même , en posant $t = \frac{\sqrt{n}\cos(u)}{\sin(u)}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^{2n-2}(u)\,\mathrm{d}u$$

10. Conclure en donnant la limite de la suite : $u_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

Cette limite est notée : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *et est appelée* ***intégrale de Gauss***