Chapitre 18 : Probabilités.

Plan

1 Rappels : outils de dénombrement

L'ensemble $E_n = \{1, 2, \dots, n\} = [\![1, n]\!]$ des entiers entre 1 et n est fini et contient n éléments (propriété admise...).

Définition 1 *On dit qu'un ensemble est fini et a pour* ***cardinal*** n *quand il existe une bijection entre* E *et* E_n*, autrement dit si on peut numéroter les éléments de* E *univoquement de* 1 *à* n*. On note :*

$$\mathrm{Card}(E) = \#(E) = |E| = n$$

Par convention $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$

On considère E et F des ensembles.

Si E et F sont finis et contenus dans un ensemble même ensemble G alors $E \cup F$ est fini et si ils sont de plus disjoints ($E \cap F = \emptyset$) : $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F)$.

Plus généralement, on a :

Propriété 1 *Si E et F sont finis et contenus dans un même ensemble G alors $E \cup F$ est fini et :*

$$\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$$

On a aussi :

$$\mathrm{Card}(E - F) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(E \cap F)$$

Dans la suite, on considère E et F des ensembles.

Si E et F sont finis alors $E \times F$ l'est aussi et :

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$$

On pose : $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E :

$$\mathcal{P}(E) = \{E' \subset E\}$$

Si E est fini alors $\mathcal{P}(E)$ l'est aussi et :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$$

On pose : E^F l'ensemble des application de F dans E.

Si E est fini et F sont finis alors E^F l'est aussi et :

$$\mathrm{Card}(E^F) = \mathrm{Card}(E)^{\mathrm{Card}(E)}$$

On pose : $\mathcal{B}ij(E)$ l'ensemble des permutations de E :

$$\mathcal{B}ij(E) = \{f : E \to E / \ \ f \text{ est bijective } \}$$

C'est aussi le nombre de façons qu'il y a de numéroter les éléments de E de 1 à $\mathrm{Card}(E)$.

Si E est fini alors $\mathcal{B}ij(E)$ l'est aussi et :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{B}ij(E)) = (\mathrm{Card}(E))!$$

Plus généralement :

Propriété 2 *Si E a pour cardinal n et $p \leq n$ alors l'ensemble des p-uplets (ou p listes) d'éléments distincts dans E (c'est à dire des suites de p éléments distincts pris dans E) a pour cardinal :*

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

c'est aussi le cardinal de l'ensemble des applications injectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Définition 2 *Si E a pour cardinal n : $\binom{n}{p}$ -"lire : p dans n"- est le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments. $\binom{n}{p}$. Si $p > n$, on convient : $\binom{n}{p} = 0$ et $\binom{n}{0} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On a :

$$n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) = p!\binom{n}{p}$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

On rappelle le **triangle de Pascal**.

Théorème 1 (Triangle de Pascal)

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

2 Univers et évènements aléatoires.

On dit qu'une **expérience** est **aléatoire** si ses **résultats** (on dit aussi **issues** ou **réalisations**) ne sont pas connus de l'expérimentateur soit parce qu'il manque d'informations sur l'expérience soit par qu'elle est aléatoire "par nature".

Nous nous limiterons au cas d'une expérience aléatoire conduisant à un nombre fini de résultats différents possibles. L'ensemble de ces résultats possibles est appelé **univers** noté Ω qui est supposé non vide.

Un singleton de Ω est donc un des résultats possibles, on dit que c'est un **évènement élémentaire**. Une partie de Ω autrement dit une partie des résultats possibles est appelée **évènement**. $\emptyset$ est l'**évènement impossible**. Ω est l'évènement **certain**.

On note souvent ω les évènements élémentaires :

$$\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}$$

Un évènement A est ainsi :

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

Si un résultat ω appartient à l'évènement A, on dit que l'évènement A est **réalisé**. Dans le cas contraire : $\omega \notin A$, l'évènement **contraire** : $\overline{A}$ ("non" A) qui est le complémentaire de A dans Ω est réalisé ainsi :

$$\overline{A} = \{\omega \in \Omega / \omega \notin A\}$$

Si A et B sont 2 évènements, on peut considérer la réalisation simultanée de A **et** de B : (A et B). C'est l'intersection de A et B :

$$A \cap B = (A, B) = (A \text{ et } B) = \{\omega \in \Omega / \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$$

De même, on peut considérer la réalisation de A **ou** de B : (A ou B), au sens large. C'est la réunion de A et B :

$$A \cup B = (A \text{ ou } B) = \{\omega\ \Omega / \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$$

Deux évènements A et B sont dit **incompatibles** s'ils ne peuvent être réalisés en même temps c'est à dire $A \cap B = \emptyset$.

Une famille finie $(A_i)_{i \in A}$ d'évènements est appelée un **système complet d'évènements** s'ils sont mutuellement incompatibles ($i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$) et si leur réunion est égale à l'univers :

$$\bigsqcup_{i \in I} A_i = \Omega$$

3 Probabilité

Définition 3 *On appelle probabilité sur Ω une application $\mathbb{P}$ qui à tout évènement A associe un réel de $[0, 1]$ tel que :*

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

et si les évènements A et B sont incompatibles :

$$\mathbb{P}(A \text{ ou } B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

L'univers Ω ainsi muni de la probabilité $\mathbb{P}$ est appelé **espace probabilisé fini**.

Dans la suite, on fixe un tel univers probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.

On vérifie rapidement :

Propriété 3 *Si A et B sont deux évènements :*

$$\mathbb{P}(A \text{ ou } B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \text{ et } B)$$

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Sur un ensemble fini, on a une probabilité particulière qui donne la même probabilité à chaque évènement élémentaire. On parle dans ce cas **d'équiprobabilité**.

Dans la situation d'équiprobabilité, si A est un évènement :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

4 Indépendance et conditionnement

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.

On considère un évènement B de probabilité non nulle.

Définition 4 *On peut définir une probabilité $\mathbb{P}_B$ sur Ω (ou sur B) en posant, si A est un évènement :*

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \text{ et } B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A, B)}{\mathbb{P}(B)}$$

appelée ***probabilité conditionnelle*** *de A sachant B ou simplement probabilité de A sachant B.*

La probabilité de A sachant B est la probabilité de A si on sait que B est réalisé.
On a ainsi, si A est probabilité non nulle (formule des probabilités composées) :

$$\mathbb{P}(A, B) = \mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A).\mathbb{P}(A)$$
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A).\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Propriété 4 (Formule des probabilités totales) *Si B est un évènement tel que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ et A est un évènement :*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B).\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})$$

Si $(A_i)_{i\in[1,n]}$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulles et si B est un évènement :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i).\mathbb{P}(A_i)$$

La dernière formule interprète $\mathbb{P}(B)$ comme une moyenne pondérée par le $\mathbb{P}(A_i)$ des probabilités conditionnelle $\mathbb{P}(B|A_i)$.

Propriété 5 (Formule de Bayes) *Si $(A_i)_{i\in[1,n]}$ est un système complet d'évènements de probabilités non nulles et si B est un évènement de probabilité non nulle :*

$$\mathbb{P}(A_j|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_j).\mathbb{P}(A_j)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_j).\mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i).\mathbb{P}(A_i)}$$

Si pour 2 évènements A et B, l'information "B est réalisé" ne modifie pas la probabilité de la réalisation de A et réciproquement, on peut parler d'**évènements indépendants** ce qui revient à dire :

Définition 5 *Les évènements A et B sont dit* ***indépendants*** *quand :*

$$\mathbb{P}(A, B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$$

C'est à dire si $\mathbb{P}(B) > 0$:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

En généralisant à une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'évènements :

Définition 6 *Les évènements $(A_i)_{i\in I}$ sont dit* ***mutuellement indépendants*** *si pour toute sous famille $(B_j)_{j\in[1,n]}$ extraite de $(A_i)_{i\in I}$:*

$$\mathbb{P}(B_1, \ldots, B_n) = \mathbb{P}(B_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(B_n)$$

Attention, l'indépendance 2 à 2 d'évènements n'entraine pas leur indépendance mutuelle (dite aussi : indépendance dans l'ensemble) comme le montre des exemples simples.

Notons enfin, cela est parfois utile, que si A,B,C sont trois évènements avec $\mathbb{P}(A, B, C) > 0$, on pourrait définir pour $\mathbb{P}_C$ la loi "sachant B" : $\mathbb{P}_C(A|B) = \frac{\mathbb{P}_C(A,B)}{\mathbb{P}_C(B)}$ ... Ce n'est pas très utile car dans ce cas : la loi "sachant A , sachant B", n'est que la loi "sachant (A et B)" :

$$\mathbb{P}((A|B)|C) = \frac{\mathbb{P}((A, B)|C)}{\mathbb{P}(B|C)} = \frac{\frac{\mathbb{P}(A,B,C)}{\mathbb{P}(C)}}{\frac{\mathbb{P}(B,C)}{\mathbb{P}(C)}} = \frac{\mathbb{P}(A, B, C)}{\mathbb{P}(B, C)} = \mathbb{P}(A|(B, C))$$

5 Variables aléatoires

On considère un univers probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$.

Définition 7 *On appelle **variable aléatoire** à valeur dans l'ensemble E une fonction*

$$X : \begin{cases} \Omega \to E \\ \omega \to X(\omega) \end{cases}$$

autrement dit une fonction X qui a chaque résultat ω d'une expérience aléatoire associe une valeur $X(\omega)$ dans E souvent noté simplement X.

Si A est une partie de E, on note $\{X \in A\}$ l'évènement :

$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$$

Du coup, on pose $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{X \in A\})$.

Par exemple, si $X \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X(\omega) = x) \qquad \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X(\omega) \leq x)$$

Définition 8 *Si X est une variable aléatoire sur Ω à valeur dans E, en posant*

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$$

*pour toute partie de A de E, on définit une probabilité sur E ou sur l'ensemble des valeurs prises par X : $X(\Omega)$. $\mathbb{P}_X$ est la **loi de probabilité de** X.*

Si x est réel, $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ est ainsi la probabilité que X prenne la valeur x. On peut ainsi définir $\mathbb{P}_X$ par la donnée des $\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Si X est une variable aléatoire à valeur dans un ensemble E définie sur Ω et f une fonction définie sur E ou sur $X(\Omega)$ à valeurs dans un ensemble F, la fonction $f(X) : \Omega \in \Omega \to f(X(\omega))$ est une nouvelle variable aléatoire appelée **image** de X par f qui définit si une probabilité $\mathbb{P}$ est donnée sur Ω une loi $\mathbb{P}_f$ dite **loi image** sur F. On pose, en fait : si $A \subset F$:

$$\mathbb{P}_f(A) = \mathbb{P}(f(X) \in A)$$

6 Couples de variables aléatoires

On se donne ici 2 variables aléatoires sur le même univers muni d'une probabilité $\mathbb{P}$:

$$X : \begin{cases} \Omega \to E \\ \omega \to X(\omega) \end{cases} \qquad Y : \begin{cases} \Omega \to F \\ \omega \to Y(\omega) \end{cases}$$

On a alors une variable aléatoire **conjointe** définissant une **loi conjointe** sur $E \times F$:

$$(X, Y) : \begin{cases} \Omega \to E \times F \\ \omega \to (X(\omega), Y(\omega) \end{cases}$$

On pose, en fait : si $A \subset E$ et $B \subset (F)$:

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(A, B) = \mathbb{P}(X \in A \text{ et } Y \in B)$$

Les lois $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ de X et Y respectivement s'appellent dans ce cas **lois marginales**.

Attention, la connaissance de $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ ne permet pas en général de déterminer $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ mais réciproquement : $\mathbb{P}_X(A)\mathbb{P}_{(X,Y)}(A, F) = \mathbb{P}(X \in A)$ pour $A \subset E$ et $\mathbb{P}_Y(B) = \mathbb{P}_{(X,Y)}(E, B) = \mathbb{P}(Y \in B)$ pour $B \subset F$.

Fixons maintenant une valeur $x \in X(\Omega) \subset E$ prise par X avec une probabilité non nulle. On a une loi $\mathbb{P}_{X=x}(B)$ sur F définie par, si $B \subset F$:

$$\mathbb{P}_{X=x}(B) = \frac{\mathbb{P}_{(X,Y)}(X = x, Y \in B)}{\mathbb{P}_X(x)} = \mathbb{P}(Y \in B | X = x)$$

qui est la **loi conditionnelle de Y sachant** $(X = x)$.

On a de même : si $y \in Y(\Omega) \subset F$ avec $\mathbb{P}(Y = y)$ non nulle et $A \subset E$:

$$\mathbb{P}_{Y=y}(A) = \frac{\mathbb{P}_{(X,Y)}(X \in A, Y = y)}{\mathbb{P}_Y(y)} = \mathbb{P}(X \in A | Y = y)$$

définit la **loi conditionnelle de X sachant** $Y = y$.

Si on a une famille (finie) $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires les définitions précédentes se généralisent. Ainsi par exemple, si $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont tels que $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})$ est non nulle, on peut définir la **loi conditionnelle de X_n sachant** $X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}$ par, si A_n est une partie des valeurs prises par X_n :

$$\mathbb{P}(X_n \in A_n | X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n \in A_n)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1})}$$

7 Variables indépendantes

On considère des variables aléatoires X et Y (à valeurs dans E et F respectivement) définies sur un espace probabilisé Ω.

Définition 9 *Les variables aléatoires X et Y sont dites **indépendantes** quand, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$ les évènements $(X \in A)$ et $\mathbb{P}(Y \in B)$ sont indépendants :*

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$$

Dans ce cas : les lois conditionnelles de X et Y ne dépendent pas de leurs conditionnements respectifs. Ce qui donne : pour tout $x, x' \in X(\Omega)$ et $y, y' \in Y(\Omega)$ de probabilités non nulles :

$$\mathbb{P}(X = x' | Y = y') = \mathbb{P}(X = x' | Y = y) = \mathbb{P}(X = x')$$

$$\mathbb{P}(Y = y|X = x') = \mathbb{P}(Y = y|X = x) = \mathbb{P}(Y = y)$$

Si on a une famille (finie) $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires, elles sont dites **mutuellement indépendantes** si, pour tout $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$, la famille d'évènements $(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)_{x_1 \in X_1(\Omega), \dots x_n, \in X_n(\Omega)}$ est mutuellement indépendante, ce qui revient à dire que :

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

et : pour tout $A_1 \subset X_1(\Omega), \dots, A_n \subset X_n(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \in A_n)$$

8 Espérance

On considère un univers probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et sur celui ci une variable aléatoire réelle X.

Définition 10 *L'**espérance** de X est la grandeur :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) X(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} x.\mathbb{P}_X(x)$$

$\mathbb{E}(X)$ s'interprète comme une moyenne pondérée par la loi de probabilité de X des valeurs prises par X.

Une variable aléatoire réelle X est dite **centrée** quand $\mathbb{E}(X) = 0$. Si X est une variable aléatoire réelle $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

Plus généralement si X et Y sont 2 variables aléatoires réelles et a et b 2 réels :

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \qquad \mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

Théorème 2 (Théorème de transfert) *Si X est une variable aléatoire et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle alors l'espérance de la variable aléatoire image : $f(X)$ est donnée par :*

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x).\mathbb{P}_X(x)$$

9 Variance, écarts type et covariance

Définition 11 *Si X est une variable aléatoire réelle, on pose :*

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

*$V(X)$ est la **variance** de X. C'est un nombre réel positif : l'espérance du carré de l'écart de X a son espérance $\mathbb{E}(X)$. L'**écart type** de X, souvent noté $\sigma(X)$ est la racine carrée de $V(X)$:*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

On montre, pour une variable aléatoire réelle X et a et b 2 réels :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \qquad V(aX+b) = a^2V(X)$$

Quand $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit que X est une **variable centrée**. Si X est une variable aléatoire, $X - \mathbb{E}(X)$ est une variable centrée.

Quand $V(X) = 1$ ou $\sigma(X) = 1$, on dit que X est une **variable réduite**. Si X est une variable aléatoire, $\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée et réduite.

Définition 12 *Si X est une variable aléatoire réelle, son **moment d'ordre** $k \in \mathbb{N}$ est $\mathbb{E}(X^k)$*

Définition 13 *Si X et Y sont 2 variables aléatoires, on pose :*

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)).(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

*$\operatorname{Cov}(X,Y)$ est la **covariance** de X et Y.*

On montre, pour des variables aléatoires réelles X et Y a et b 2 réels :

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - (\mathbb{E}(X))(\mathbb{E}(Y))$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y)$$

Propriété 6 *Si X et Y sont 2 variables aléatoires indépendantes alors (attention, il n'y a pas de réciproque) :*

- $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$;
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables 2 à 2 indépendantes :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$$

Les premiers "vrais" résultats des probabilités sont les inégalités suivantes :

Théorème 3 (Inégalité de Markov) *Si X est une variable aléatoire réelle et a un réel strictement positif :*

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$$

Théorème 4 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) *Si X est une variable aléatoire réelle et a un réel strictement positif :*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

10 Quelques lois usuelles

Pour rappel, si Ω est un ensemble fini (non vide), la **loi uniforme** ou loi **équiprobable** est celle pour lequel chaque résultat a la même probabilité $\frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$.

Dans le cas où un seul résultat est possible, il a probabilité 1, on parle de **loi certaine**.

Si $p \in [0,1]$ et si 2 résultats sont possibles : 0 (ou échec) avec la probabilité $(1-p)$ et 1 (ou succès) avec la probabilité p, on obtient la **loi de Bernoulli** de paramètre p sur $\{0,1\}$ notée $\mathcal{B}(p)$. Si X suit une telle loi, on note $X \sim \mathcal{B}(p)$:

$$\mathbb{E}(X) = p \qquad V(X) = p - p^2$$

Si n est un entier et $p \in [0,1]$ la **loi binomiale** est la loi sur $\{0,\dots,n\}$ du nombre de succès en n tirages indépendants si la probabilité de succès de chaque tirage est p et la probabilité d'échec est $(1-p)$. On montre que si X suit une telle loi : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et si $k \in \{0\dots,n\}$ alors :

$$\mathbb{P}_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{E}(X) = pn \qquad V(X) = n(p-p^2)$$

Théorème 5 *Si $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $X_1+\dots+X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$*

Donc dans les conditions précédentes :

$$\mathbb{E}(X_1+\dots+X_n) = np \quad , \quad V(X_1+\dots+X_n) = n(p-p^2)$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right) = p \quad , \quad V\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right) = \frac{p-p^2}{n}$$

Savoirs

Outils de dénombrement, notion de probabilité, probabilité conditionnelle, formule des probabilités totales, formule de Bayes, indépendance, loi d'une variable aléatoire, variables aléatoires indépendantes, espérance, variance, écart type, covariance, cas des variables indépendantes, Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchébichev, Lois usuelles : définition, espérance, variance de la loi binomiale.

Savoir-faire

Reconnaître des évènements indépendants ou pas, un système complet d'évènements. Reconnaître une variable aléatoire suivant une loi uniforme, une loi binomiale, des variables aléatoires indépendantes, appliquer les formules du cours : Bayes, probabilités totales, probabilités conditionnelles ...