

Fiche 81 : Probabilités.

Exercice 1

On considère N urnes numérotées de 1 à N . Dans l'urne $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, il y a i boules numérotées de 1 à i . On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. On note X le numéro de la boule tirée.

Déterminer la loi de X .

Exercice 2

$N \in \mathbb{N}$ est fixé

On dispose de $(N+1)$ urnes, numérotées de 0 à N . L'urne k contient k boules rouges et $(N-k)$ boules blanches. On choisit une urne au hasard. Sans connaître son numéro, on en tire n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.

1. Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule rouge sachant que, au cours des n premiers tirages, seules des boules rouges ont été tirées ?
2. Calculer la limite de cette probabilité lorsque N tend vers l'infini.

Exercice 3

L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
 - (a) les trois sujets tirés ;
 - (b) exactement deux sujets sur les trois sujets ;
 - (c) aucun des trois sujets.

Exercice 4

X_1 et X_2 sont (les variables aléatoires correspondant à) deux dés à 6 faces non pipés indépendants et Y est leur min, Z leur max.

1. Déterminer pour $x \geq 1$: $F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$. En déduire la loi de Z .
2. Procéder de même pour déterminer la loi de Y .
3. Y et Z sont-ils indépendants ?

Exercice 5 : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On étudie une marche aléatoire sur l'axe réel.

Pour $t = 0$, la particule est au point O d'abscisse nulle et pour chaque unité de temps (indépendamment des déplacements précédents) :

- l'abscisse de la particule augmente de 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.
- l'abscisse de la particule diminue de 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $X_k = 1$ si on se déplace vers la droite et $X_k = -1$ sinon.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note S_n la variable aléatoire représentant l'abscisse de la particule au temps $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$: donner la loi de X_k , son espérance et sa variance.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$ relier S_{2n} aux variables (X_k) en déduire sa loi, son espérance, sa variance (On remarquera que S_{2n} est un entier pair).
3. Pour n et m entiers non nuls, déterminer $\text{cov}(S_n, S_{n+m})$, Les variables S_n et S_m sont-elles indépendantes ?