Fiche 83 : Probabilités.

Exercice 1 : Fonction génératrice

On considère X une variable à valeurs entières sur un univers fini Ω.
On pose, si s est réel :

$$g_X(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} s^n \mathbb{P}(X = n)$$

g est la **fonction génératrice** de la variable X.

1. Montrer que la somme précédente est finie et définit donc un polynôme.
2. Montrer que si n est entier :
$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!} g_X^{(n)}(0)$$
3. Montrer que si n est entier :
$$\mathbb{E}(X) = g'_X(1)$$
4. Déterminer la fonction génératrice d'une variable de Bernoulli : $B(p)$, $p \in]0, 1[$.
5. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires entières et indépendantes alors
$$g_{X+Y} = g_X g_Y$$
6. Déterminer la fonction génératrice d'une loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$.
7. Déterminer la fonction génératrice de la somme de 2 variables indépendantes de lois uniformes sur $[\![1, 6]\!]$.
8. Montrer qu'on ne peut pas truquer 2 dés classiques à 6 faces de sorte que leur somme satisfasse une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.
9. On considère maintenant des dés non pipés X'_1 et X'_2 mais dont les faces sont numérotées respectivement : $1, 2, 2, 3, 3, 4$ et et $1, 3, 4, 5, 6, 8$. Quelles sont les lois et les fonctions génératrices des variables aléatoires X'_1, X'_2 et $X'_1 + X'_2$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On considère une urne contenant n boules indiscernables numérotées de 1 à n.
On tire au hasard une boule puis on la retire de l'urne ainsi que toutes les boules ayant un numéro supérieur à celui de la boule tirée.. On réitère l'expérience jusqu'à ce que l'urne soit vide et on note X_n la varible aléatoire égale au nombre de tirages réalisés pour vider l'urne.
Pour un entier i, on notera N_i la variable aléatoire égale au numéro de la i-ième boule tirée s'il y a eu au moins i tirages et 0 sinon.

1. Trouver la loi de X_2, puis donner son espérance et sa variance.
2. Trouver la loi de X_3 et donner son espérance.
3. Donner l'ensemble des valeurs que peut prendre X_n.
4. Déterminer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.
5. Prouver (*on citera le résultat du cours utilisé*) que pour $k \geq 2$:
$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(X_{i-1} = k - 1)$$
6. Montrer que
$$(n + 1)\mathbb{E}(X_{n+1}) - n\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_n) + 1$$
puis que
$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + \frac{1}{n + 1}$$
7. Déduire une expression de l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ sous la forme d'une somme.
8. Montrer (*on pourra utiliser des intégrales*) que si $n \geq 2$:
$$\ln(n + 1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

9. En déduire un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_n)$ pour $n \to \infty$.

Exercice 3

On rappelle que si $k \leq n$ sont des entiers naturels :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

1. Déterminer c_0, c_1, c_2.
2. Montrer que si $k \in \mathbb{N}$:
$$(4k+2)c_k = (k+2)c_{k+1}$$
3. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, c_n est un entier naturel.
5. Montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$:
$$4\left(\frac{k}{k+1}\right)^{3/2} \leq \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq 4\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{3/2}$$
puis que si $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{1}{4}\frac{4^n}{n\sqrt{n}} \leq c_n \leq \frac{4^n}{n\sqrt{n}}$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} k c_k c_{n-k}$$

6. Montrer (*On pourra poser $i = n-k$ dans la somme qui définit T_n*) que si $n \in \mathbb{N}^*$: $T_n = \frac{n}{2}S_n$.
7. Montrer à l'aide de l'égalité de la question 2 que si $n \in \mathbb{N}$:
$$c_{n+1} + 4T_n + 2S_n = T_{n+1} + S_{n+1}$$
8. Montrer alors par récurrence, toujours en utilisant la question 2, que si $n \in \mathbb{N}$: $c_{n+1} = S_n$.

On a ainsi montré que si $n \in \mathbb{N}$:

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$$

9. Montrer que si $x \in [-1/4, 1/4]$, la série $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ est absolument convergente.

On pose pour $x \in [-1/4, 1/4]$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{et} \quad g(x) = 2xf(x)$$

On admet que la fonction f est continue sur $[-1/4, 1/4]$.

10. En utilisant un produit de Cauchy, montrer que si $x \in [-1/4, 1/4]$:
$$(f(x))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n-1}$$
11. En déduire que si $x \in [-1/4, 1/4]$:
$$(g(x))^2 = 2g(x) - 4x$$
puis qu'il existe une fonction ϵ définie sur $[-1/4, 1/4]$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ telle que :
si $x \in [-1/4, 1/4]$:
$$g(x) = 1 + \epsilon(x)\sqrt{1-4x^2}$$
12. Montrer que ϵ est continue sur $]-1/4, 1/4[$.
13. Conclure que : $\forall x \in [-1/4, 1/4]$:
$$g(x) = 1 - \sqrt{1-4x^2}$$