

Fiche 84 : Probabilités et révisions.

Exercice 1

On considère un espace probabilisé fini Ω sans évènement non vide à probabilité nulle et sur celui ci l'espace vectoriel des variables aléatoires $E = \{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}$.

1. Montrer qu'on définit un produit scalaire sur E en posant, si X et Y sont dans E :

$$(X, Y) = \mathbb{E}(X \times Y)$$

2. Déterminer la projection orthogonale de E sur $\mathbb{R}$: l'ensemble $\mathbb{R}$ des variables aléatoires constantes sur Ω ?
3. Si X est dans E , déterminer la distance entre X et $\mathbb{R}$. Comment s'appelle usuellement cette distance ?
4. Soit Y une variable aléatoire non constante sur Ω , déterminer la projection orthogonale de l'espace E sur l'espace $\text{Vect}(1, Y)$.

Exercice 2

Montrer que si f est une fonction C^1 sur $[0, \pi]$ alors pour $n \rightarrow \infty$:

$$\int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt \rightarrow 0$$

Exercice 3

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que :

$$\int_0^\pi x(x - \pi) \cos(2nx) dx = \frac{\pi}{2n^2}$$

2. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$:

$$\sum_{k=1}^n \cos(2kx) = \frac{\cos((n+1)x) \sin(nx)}{\sin(x)} = \frac{1}{2} \frac{\sin((2n+1)x) - \sin(x)}{\sin(x)}$$

3. Montrer que la fonction $f(x) = \frac{x(x-\pi)}{\sin(x)}$ se prolonge en une fonction C^1 sur $[0, \pi]$.
4. En déduire la valeur de :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$