Fiche 85 : Déterminant.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. A quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ existe-t-il un vecteur v de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ tel que $A.v = \lambda v$.
2. Déterminer les couples (λ, v) solutions du problème précédent.
3. En déduire une diagonalisation de la matrice A.

Exercice 2

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ et déterminer la condition d'inversibilité de la matrice.

Exercice 3

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, si A, B, C sont 3 points non alignés, montrer que $M = (x, y, z)$ est dans le plan (ABC) si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A & x - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A & y - y_A \\ z_B - z_A & z_C - z_A & z - z_A \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 4

Soit $(a_1, a_2, a_3) \in (\mathbb{K})^3$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et on considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

Calculer le produit AV, puis $\det(AV)$ en fonction de $\det(V)$, et en déduire $\det(A)$.

Exercice 5

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$A^2 - \operatorname{tr}(A).A + \det(A) I_2 = 0$$

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\varphi^2 = -\mathrm{id}_E$.

1. Donner des exemples de telles applications dans le cas $n = 2$ ou 4.
2. Montrer que de telles applications existent si et seulement si n est pair.