Fiche 87 : Déterminant.

Exercice 1

1. Montrer que l'espace des formes bi-linéaires sur $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel. En donner une base.
2. Montrer que l'espace des formes bi-linéaires symétriques sur $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel. En donner une base.
3. Montrer que l'espace des formes bi-linéaires antisymétriques sur $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel. En donner une base.
4. Montrer que l'espace des formes bi-linéaires antisymétriques sur $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel. En donner une base.

Exercice 2

On note $GL_2(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \text{ tq } \det M = \pm 1\}$, $SL_2(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \text{ tq } \det M = 1\}$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Démontrer que M a un inverse dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det M = \pm 1$.
2. Démontrer que les ensembles et $GL_2(\mathbb{Z})$ et $SL_2(\mathbb{Z})$ sont des groupes pour la multiplication matricielle.
3. Montrer que (a, b) un couple d'entiers constitue la première colonne d'une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si a et b sont premiers entre eux.

Exercice 3

1. Soient $a, b, c, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables et $f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$.

   Montrer que f est dérivable et que : $f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$.
2. Généraliser à un déterminant $n \times n$.
3. Application : Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$.

Exercice 4

5 Soit E un ev de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$, et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$, n vecteurs de E. On note det le déterminant dans une base fixée de E. Démontrer que :

$$\det(f(\vec{u}_1), \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) + \det(\vec{u}_1, f(\vec{u}_2), \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n) + \cdots + \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, f(\vec{u}_n)) = \det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)\operatorname{tr}(f).$$