Fonctions de 2 variables.

1 Continuité des fonctions de 2 variables.

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^2$ dont les points sont noté $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On note $\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}$ la norme euclidienne canonique.

La **distance** $d(M_1, M_2)$ entre les points $M_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $M_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ est définie par :

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \|(M_2 - M_1)\|$$

On rappelle l'inégalité triangulaire : si M_1, M_2, M_3 sont 3 points de $\mathbb{R}^2$ alors :

$$d(M_1, M_3) \leq d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3)$$

Définition 1 *Si un point $M_0 = (x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$ est fixé et $r > 0$ l'ensemble*

$$B(M_0, r) = \{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / d(M_0, M) < r\}$$

*est la **boule ouverte** ou **disque ouvert** de rayon r de centre M_0.*

Définition 2 *Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est dite **ouverte** dans $\mathbb{R}^2$ quand, pour tout point $M_0 = (x_0, y_0)$ de U, il existe $r > 0$ tel que : $B(M_0, r) \subset U$*

L'inégalité triangulaire montre qu'une boule ouverte est ouverte au sens précédent ...
On fixe ici un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

On considère maintenant une fonction $f : U \to \mathbb{R}$
La fonction f, est dite **continue** sur U quand, pour tout point M_0 de U :

$$\forall \epsilon > 0, \exists r_\epsilon > 0, B(M_0, r_\epsilon) \subset U \text{ et } f(B(M_0, r_\epsilon)) \subset]f(M_0) - \epsilon, f(M_0) + \epsilon[$$

Les fonctions construites par sommes, produits, quotients, composées de fonctions élémentaires sont continues là où elles sont définies.
L'ensemble des fonctions continues sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel réel noté $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$.

2 Dérivées partielles

On considère f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

Si $M_0 = (x_0, y_0) \in U$, on dispose des **applications partielles** f_x et f_y définies en M_0 :

$$f_x \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}/(x, y_0) \in U\} \to \mathbb{R} \\ x \to f(x, y_0) \end{cases}$$

$$f_y \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}/(x_0, y) \in U\} \to \mathbb{R} \\ y \to f(x_0, y) \end{cases}$$

La fonction f admet des **dérivées partielles** en M_0 quand les applications partielles sont dérivables en x_0 et y_0 respectivement et on pose alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left(\frac{\mathrm{d}f(x, y_0)}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0} = f'_x(x_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left(\frac{\mathrm{d}f(x_0, y)}{\mathrm{d}y}\right)_{y=y_0} = f'_y(y_0)$$

Attention, une fonction peut admettre en tout point des dérivées partielles sans être continue ...

Si f admet des dérivées partielles en tout point de U, les dérivées partielles sont des fonctions définies sur U.

Définition 3 *La fonction f est dite **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur U quand les dérivées partielles de f sont définies et continues sur U.*

On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Les fonctions construites par sommes, produits, quotients, composées de fonctions élémentaires de classe $\mathcal{C}^1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ là où elles sont définies.

L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel réel noté $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

Propriété 1 (Développement limité d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$) *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$:*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|((h, k)\|)$$

On note :

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\mathrm{d}f(x_0,y_0).\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+o(\|((h,k)\|)$$

Où :

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\mathrm{d}y$$

Qu'on écrit plus souvent sous la forme :

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

Définition 4 *Si f est classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $M_0=(x_0,y_0)\in U$ alors on pose*

$$\nabla f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$$

*le **gradient** de f en (M_0)*

On a ainsi :

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+<\nabla f(x_0,y_0),\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}>+o(\|((h,k)\|)$$

Le gradient est perpendiculaire aux lignes de niveaux de f et dirigé dans la direction dans laquelle f croit le plus vite.

3 Dérivée partielles et arc paramétré

On considère f une fonction à valeurs réelles, définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

Soit $u=\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

Définition 5 *La **dérivée de f suivant** u en $M_0=(x_0,y_0)\in U$ est la quantité :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k=<\nabla f(x_0,y_0),u>$$

C'est aussi la dérivée : $\left(\dfrac{\mathrm{d}(f(M_0+t.u)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}$.

On considère $\gamma : \begin{cases} I \to U \\ t \to (x(t), y(t) \end{cases}$ un **arc de classe** $\mathcal{C}^1$ (c'est à dire que les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$) à valeur dans U, I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Son **vecteur vitesse en** $t \in I$ est $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

Alors pour $t \in I$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}(f(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}\right) =< \nabla f(x_0, y_0), \gamma'(t) >= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)).x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).y'(t)$$

4 Changement de variable en dimension 2

On considère U et V 2 ouvert de $\mathbb{R}^2$ et

$$g_x \begin{cases} V \to \mathbb{R} \\ (u, v) \to g_x(u, v) \end{cases} \quad g_y : \begin{cases} V \to \mathbb{R} \\ (u, v) \to g_y(u, v) \end{cases}$$

2 fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telle que la fonction (qu'il faut penser comme étant un changement de variables dans $\mathbb{R}^2$)

$$g \begin{cases} V \to U \\ (u, v) \to (g_x(u, v), g_y(u, v)) \end{cases}$$

qu'on dit de classe $\mathcal{C}^1$ soit bien définie.

On considère de plus f une fonction à valeurs réelles, définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Théorème 1 *La fonction*

$$f \circ g : \begin{cases} V \to \mathbb{R} \\ (u, v) \to f(g_x(u, v), g_y(u, v)) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ *et pour* $(u, v) \in V$.

On a sous forme abrégée :

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} f(g_x(u, v), g_y(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial g_x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} . \frac{\partial g_y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} f(g_x(u, v), g_y(u, v)) = \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial g_x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} . \frac{\partial g_y}{\partial v}$$

Sous forme développée

$$\frac{\partial}{\partial u} f(g_x(u,v), g_y(u,v)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(g(u,v)).\left(\frac{\partial g_x}{\partial u}\right)(u,v) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) g(u,v).\left(\frac{\partial g_y}{\partial u}\right)(u,v)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} f(\phi(u,v), \psi(u,v)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(g(u,v)).\left(\frac{\partial g_x}{\partial v}\right)(u,v) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) g(u,v).\left(\frac{\partial g_y}{\partial v}\right)(u,v)$$

5 Extremums

On considère f une fonction à valeurs réelles, définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $M_0 = (x_0, y_0) \in U$.

On a :
$\mathrm{Max}_U(f) = f(x_0, y_0)$ quand , pour tout $M \in U$: $f(M) \leq f(M_0)$

$\mathrm{Min}_U(f) = f(x_0, y_0)$ quand , pour tout $M \in U$: $f(M) \geq f(M_0)$

Dans les cas précédents, on, dit que f admet un extrémum **global** en M_0 (un tel point n'existe pas forcément).

On dit que f admet un extrémum **local** en M_0 quand il existe un ouvert $V \subset U$ tel que $V \ni M_0$ et f_V admet un extrémum global en M_0 (un tel point n'existe pas forcément).

Définition 6 *Dans les conditions précédentes, M_0 est un* ***point critique*** *de f quand*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0$$

c'est à dire : $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

Le résultat central du calcul différentiel est :

Théorème 2 *Tout extremum local ou global d'une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est un point critique de f.*