EXERCICE 1

On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note : $\forall n \geqslant 1,\ w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 lorsque x tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{1+x}$.
   (b) Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.
   (c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ, appelé **constante d'Euler**.
2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. On note pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$
   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont adjacentes.
   (b) Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?
4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.
   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :
$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_{n}^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$$
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et convergente.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$
   puis que :
$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$$
6. Démontrer alors que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$