PROBLÈME I

Chute d'une tartine beurrée

I.1) On étudie le système {tartine} dans le référentiel lié à la table, supposé galiléen.
La tartine est soumise :

- à l'action $\vec{R}$ de la table, qui est est exercée au point I. Son bras de levier relativement à Δ est nul, son moment également.
- à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$. Le bras de levier du poids relativement à l'axe Δ vaut $b\sin(\theta)$ et il fait tourner la tartine dans le sens positif (θ croissant) donc son moment vaut $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = mgb\sin(\theta)$.

D'après le théorème scalaire du moment cinétique, $J_\Delta\dot{\omega} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P})$ donc $\dfrac{1}{3}m(a^2+4b^2)\,\dot{\omega} = mgb\sin(\theta)$ soit $\boxed{\dot{\omega} = \dfrac{3gb\sin(\theta)}{a^2+4b^2}}$.

On multiplie par $\omega = \dot{\theta}$: $\dot{\omega}\omega = \dfrac{3gb}{a^2+4b^2}\sin(\theta)\dot{\theta}$ soit $\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}\omega^2}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{3gb}{a^2+4b^2}\dfrac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}$.

On intègre entre l'instant initial où $\theta = 0$ et $\omega = \dot{\theta} \approx 0$ et un instant quelconque, ce qui donne : $\boxed{\omega^2 = \dfrac{6gb}{a^2+4b^2}(1-\cos(\theta))}$.

I.2) La réaction de la table ne travaille pas car elle s'applique au point I qui est immobile, et le poids est une force conservative. En prenant comme origine de l'altitude le point I, l'énergie potentielle associée est $\mathcal{E}_p = mgx_G = mgb\cos(\theta)$.
D'après le théorème de la puissance mécanique, l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ se conserve.
Initialement, $\theta = 0$ et $\dot{\theta} \approx 0$ donc $\mathcal{E}_m = mgb$.
À un instant quelconque, $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}J_\Delta\omega^2 + mgb\cos(\theta) = mgb$ soit $\boxed{\omega^2 = \dfrac{6gb}{a^2+4b^2}(1-\cos(\theta))}$.

I.3) Le centre d'inertie G a un mouvement circulaire de rayon b donc $\vec{a}_G = -b\omega^2\,\vec{e}_r + b\dot{\omega}\,\vec{e}_\theta = -\dfrac{6gb^2(1-\cos(\theta))}{a^2+4b^2}\vec{e}_r + \dfrac{3gb^2\sin(\theta)}{a^2+4b^2}\vec{e}_\theta$.
La tartine est soumise à son poids $\vec{P} = -mg\cos(\theta)\,\vec{e}_r + mg\sin(\theta)\,\vec{e}_\theta$ et à la réaction de la table $\vec{R} = T\,\vec{e}_\theta + N\,\vec{e}_r$.
D'après le principe fondamental de la dynamique, $\vec{P} + \vec{R} = m\,\vec{a}_G$.
En projetant :

- sur $\vec{e}_r$: $N - mg\cos(\theta) = -\dfrac{6mgb^2(1-\cos(\theta))}{a^2+4b^2}$ soit $\boxed{N = mg\dfrac{(a^2+10b^2)\cos(\theta) - 6b^2}{a^2+4b^2}}$.
- sur $\vec{e}_\theta$: $T + mg\sin(\theta) = \dfrac{3mgb^2\sin(\theta)}{a^2+4b^2}$ soit $\boxed{T = -mg\dfrac{a^2+b^2}{a^2+4b^2}\sin(\theta)}$.

I.4) Le contact est rompu lorsque $N = 0$ soit pour un angle $\boxed{\theta = \arccos\left(\dfrac{6b^2}{a^2+10b^2}\right) = 87°}$.

I.5) Pour $\theta = \pi/4$, $N = mg\dfrac{\sqrt{2}a^2/2 + (5\sqrt{2}-6)b^2}{a^2+4b^2}$ et $T = -mg\dfrac{a^2+b^2}{a^2+4b^2}\sqrt{2}/2$ donc $\boxed{\mu = \dfrac{|T|}{|N|} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2+(10-6\sqrt{2})b^2} = 1{,}0}$.

I.6) La vitesse angulaire est $\omega(\pi/4) = \sqrt{\dfrac{6gb(1-\sqrt{2}/2)}{a^2+4b^2}} = 6{,}4\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

La vitesse initiale étant négligeable, le centre d'inertie a une altitude relativement à I exprimée par $z = -\dfrac{1}{2}gt^2$ pour une chute libre. Il atteint le sol en $z = -h$ à l'instant $t_f = \sqrt{2h/g} = 0{,}39\,\mathrm{s}$. Pendant cette durée, la tartine tourne de $\boxed{\omega t_f = 2{,}5\,\mathrm{rad}}$.
Puisqu'elle avait déjà tourné de $\pi/4$ pendant le basculement, l'angle total de rotation est $\underline{3{,}3\,\mathrm{rad}}$ qui est proche de π rad : la tartine a fait un demi-tour, <u>elle se retrouve sur la face beurrée</u> !

PROBLÈME II

Modèle planétaire de l'atome

Partie A. Diffusion de Rutherford

II.1) La force électrostatique exercée par le noyau en O (de charge $q_O = Ze$ sur la particule α en M (de charge $q_M = 2e$) a pour expression $\boxed{\vec{F}_{O/M} = \dfrac{q_O q_M}{4\pi\varepsilon_0 OM^2}\vec{u}_{OM} = \dfrac{2ZK}{r^2}\vec{e}_r}$.

Montrons qu'il existe une fonction $\mathcal{E}_p$ telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{E}_p$. $\vec{F}$ étant dirigée selon $\vec{e}_r$, $\mathcal{E}_p$ ne doit dépendre que de la coordonnée r. Alors $\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{E}_p(r) = \dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$. Il faut donc que $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r} = -\dfrac{2ZK}{r^2}$. Une telle fonction existe, il s'agit de $\boxed{\mathcal{E}_p(r) = \dfrac{2ZK}{r}}$.
La force est donc conservative.

II.2) Initialement, $\overrightarrow{OM} = X\,\vec{e}_x + b\,\vec{e}_y$ avec $X \to -\infty$ et le vecteur vitesse initial est $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$.

Donc $\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge (m\vec{v}) = -mbv_0\,\vec{e}_z}$.

II.3) D'après le théorème du moment cinétique en O, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = r\,\vec{e}_r \wedge \dfrac{2ZK}{r^2}\vec{e}_r = \vec{0}$ donc le moment cinétique se conserve.
On en déduit que $\overrightarrow{OM}$ qui est perpendiculaire à $\vec{L}_O$, reste perpendiculaire à $\vec{e}_z$. Le mouvement se fait donc entièrement dans le plan $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Avec $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ en un point quelconque de la trajectoire, le moment cinétique s'écrit : $\vec{L}_O = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z$.
Par conservation, on obtient la relation $\boxed{r^2\dot{\theta} = -bv_0}$.

II.4) D'après la deuxième loi de Newton, $m\vec{a} = \dfrac{2ZK}{r^2}\vec{e}_r$. En projetant sur $\vec{e}_y$ il vient $ma_y = \dfrac{2ZK}{r^2}\vec{e}_r \cdot \vec{e}_y = \dfrac{2ZK}{r^2}\sin(\theta)$.
Or $r^2 = -\dfrac{bv_0}{\dot{\theta}}$ donc $\boxed{a_y = -\dfrac{2ZK}{mbv_0}\sin(\theta)\dot{\theta}}$.

II.5) Cette équation se met sous la forme suivante : $\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2ZK}{mbv_0}\dfrac{\mathrm{d}[\cos(\theta)]}{\mathrm{d}t}$.

On intègre entre $t = 0$ et $t \to \infty$: $v_y(t \to \infty) - 0 = \dfrac{2ZK}{mbv_0}(\cos(\varphi) + 1)$ car θ tend vers π pour $t \to 0$.
La seule force exercée sur la particule α est conservative donc l'énergie mécanique se conserve. L'énergie potentielle s'annulant à l'infini, l'énergie cinétique finale est égale à l'énergie cinétique initiale, d'où $v(t \to 0) = v_0$ et $v_y(t \to \infty) = v_0\sin(\varphi)$.
On en déduit $\dfrac{\sin(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)} = \dfrac{2ZK}{mbv_0^2}$.

Or $\sin(\varphi) = 2\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)$ et $1 + \cos(\varphi) = 2\cos^2(\varphi/2)$ donc $\dfrac{\sin(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)} = \tan(\varphi/2)$.

On obtient : $\boxed{\tan\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) = \dfrac{2ZK}{mbv_0^2}}$.

II.6) Pour $\varphi > \pi/2$, $\tan(\varphi/2) > 1$. On en déduit $\boxed{b < b_{\max} = \dfrac{2ZK}{mv_0^2} = \dfrac{ZK}{\mathcal{E}_c}}$.

Avec $\mathcal{E}_c = 5\,\mathrm{MeV} = 8 \times 10^{-13}\,\mathrm{J}$ l'énergie cinétique initiale de la particule α, on estime le rayon caractéristique d'un noyau d'or à $\boxed{r = b_{\max} = 2{,}3 \times 10^{-14}\,\mathrm{m}}$.

II.7) Supposons que la particule n'atteint pas le noyau, qu'elle atteint une distance minimale d du centre puis repart en arrière (si $b = 0$, $\varphi = \pi$).
Lorsqu'elle atteint cette distance minimale, son énergie cinétique s'annule donc par conservation de l'énergie mécanique, son énergie potentielle en ce point est égale à son énergie cinétique initiale : $\dfrac{2ZK}{d} = \mathcal{E}_c$ soit $d = 2b_{lim}$: la distance minimale est plus grande que le rayon du noyau, la particule α ne le touche donc pas.

Partie B. Limite du modèle planétaire

II.8) La force exercée par le noyau sur l'électron est $\vec{F} = -\dfrac{K}{r^2}\vec{e}_r$.

D'après la deuxième loi de Newton $\vec{F} = m_e\vec{a}$ avec $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ pour un mouvement circulaire.

On identifie : $\boxed{w = \dot{\theta} = \sqrt{\dfrac{K}{m_e r^3}}}$.

II.9) L'énergie potentielle électrostatique de l'électron est $\mathcal{E}_p = -\dfrac{K}{r}$. Son énergie cinétique $\mathcal{E}_c = \dfrac{1}{2}m_e v^2 = \dfrac{1}{2}m_e r^2\omega^2 = \dfrac{K}{2r}$.

On en déduit son énergie mécanique : $\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = -\dfrac{K}{2r}}$.

II.10) La puissance émise conduit à une perte d'énergie mécanique pour l'électron, qui devient encore plus négative. Sa norme augmente donc, ce qui correspond à une <u>diminution de r</u>.

II.11) $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m_e} = -\dfrac{K}{m_e r^2}\vec{e}_r$ donc $\boxed{\mathcal{P} = \dfrac{2K^3}{3m_e^2c^3r^4}}$.

II.12) D'après le théorème de la puissance mécanique. $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}(r)$ soit $\dfrac{K}{2r^2}\dot{r} = -\dfrac{2K^3}{3m_e^2c^3r^4}$.

Il vient : $\boxed{r^2\dot{r} = -A}$ avec $\boxed{A = \dfrac{4K^2}{3m_e^2c^3} = 3{,}15 \times 10^{-21}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}}$.

II.13) On intègre : $r^3(t) - r_0^3 = -3At$. L'électron atteint le noyau pour $r(t_f) = 0$ d'où $\boxed{t_f = \dfrac{r_0^3}{3A} = 16\,\mathrm{ps}}$.

On vérifie que c'est bien très largement supérieur à la durée pour effectuer un tour, qui est de $1{,}5 \times 10^{-16}$ s, ce qui justifier l'hypothèse d'une variation « lente » du rayon.

Cependant c'est un temps très faible, le modèle planétaire de l'atome est donc instable. Les conditions de quantification de Bohr vont lever cette contrainte, pour aboutir ensuite à un modèle purement quantique de l'atome.

PROBLÈME III

L'hydrogène, énergie du futur

Partie A. Pile à combustible

III.1) À l'anode se produit une oxydation qui libère des électrons au pôle négatif : $\boxed{\mathrm{H_2(g) = 2\,H^+(aq) + 2\,e^-}}$.

À la cathode se produit une réduction qui consomme les électrons arrivant au pôle positif : $\boxed{\mathrm{O_2(g) + 4\,H^+(aq) + 4\,e^- = 2\,H_2O(\ell)}}$.

III.2) On ajoute membre à membre après avoir multiplié par 2 la première équation : $\boxed{\mathrm{2\,H_2(g) + O_2(g) = 2\,H_2O(\ell)}}$.

III.3) Le rôle de la membrane électrolyte est dassurer la conduction du courant entre les compartiments anodique et cathodique par l'intermédiaire de la conduction ionique des protons $\mathrm{H^+}$. Si elle perd sa capacité de rétention d'eau, elle conduira alors beaucoup moins les ions.

III.4) Le potentiel redox de l'anode est : $E_- = E^\circ(\mathrm{H^+(aq)/H_2(g)}) + \dfrac{RT}{2\mathcal{F}}\ln\left(\dfrac{a(\mathrm{H^+(aq)})^2}{a(\mathrm{H_2(g)})}\right)$.

Le potentiel redox de la cathode est : $E_+ = E^\circ(\mathrm{O_2(g)/H_2O(\ell)}) + \dfrac{RT}{4\mathcal{F}}\ln\left(\dfrac{a(\mathrm{H^+(aq)})^4 a(\mathrm{O_2(g)})}{a(\mathrm{H_2O(\ell)})^2}\right)$.

La f.e.m. de la pile vaut :

$$\begin{aligned}
e = E_+ - E_- &= E^\circ(\mathrm{O_2(g)/H_2O(\ell)}) - E^\circ(\mathrm{H^+(aq)/H_2(g)}) + \frac{RT}{4\mathcal{F}}\ln\left(\frac{a(\mathrm{H^+(aq)})^4 a(\mathrm{O_2(g)}) a(\mathrm{H_2(g)})^2}{a(\mathrm{H_2O(\ell)})^2 a(\mathrm{H^+(aq)})^4}\right)\\
&= E^\circ(\mathrm{O_2(g)/H_2O(\ell)}) - E^\circ(\mathrm{H^+(aq)/H_2(g)}) + \frac{RT}{4\mathcal{F}}\ln\left(\frac{p(\mathrm{O_2(g)})p(\mathrm{H_2(g)})^2}{(p^\circ)^3}\right)
\end{aligned}$$

Les pressions partielles des gaz étant égales à 1 bar soit la pression standard, on obtient :

$$\boxed{e = E^\circ(O_2(g)/H_2O(\ell)) - E^\circ(H^+(aq)/H_2(g)) = 1{,}23\,\mathrm{V}}$$

III.5) Lorsqu'on associe des cellules en série, elle sont parcourues par le même courant mais leurs tensions s'ajoutent. La puissance fournie par un générateur a pour expression $P = UI$ donc la tension totale aux bornes de la pile vaut $U = \frac{P}{I} = 600\,\mathrm{V}$, ce qui correspond à <u>858 cellules</u> mises en série.

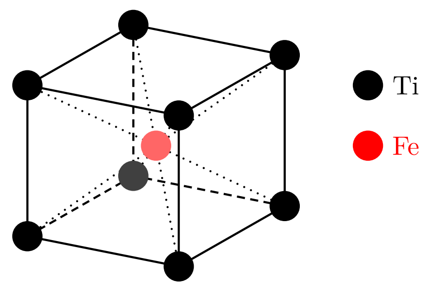
III.6) Pendant une durée Δt, la charge que fait circuler la pile est $Q = I\Delta t$, ce qui représente une quantité de matière d'électrons $n(e^-) = \frac{Q}{\mathcal{F}} = \frac{I\Delta t}{\mathcal{F}}$.

Or la réaction d'une molécule de dihydrogène libère 2 électrons si bien que $n(H_2) = \frac{n(e^-)}{2}$, ce qui représente une masse $\boxed{m(H_2) = n(H_2)M(H_2) = \frac{M_H I\Delta t}{\mathcal{F}}} = 4{,}7\,\mathrm{g}$.

Cette masse est consommée par chaq ue cellule, la masse totale consommée en 1 h est donc $\boxed{858 \times m(H_2) = 4{,}0\,\mathrm{kg}}$.

Partie B. Stockage du dihydrogène

III.7) Maille.



III.8) Le contact se fait le long de la grande diagonale du cube : $a\sqrt{3} = 2r_{Fe} + 2r_{Ti}$ donc $\boxed{a = \frac{2}{\sqrt{3}}(r_{Fe} + r_{Ti}) = 312\,\mathrm{pm}}$.

Dans une maille il y a 1 atome de fer (chaque sommet contribuant pour 1/8) et un atome de titane. La masse volumique vaut alors $\boxed{\rho = \frac{M_{Fe} + M_{Ti}}{N_A a^3} = 5{,}68 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}}$.

La maille est plus petite que prévu par le modèle, ce qui est corrélé avec une masse volumique plus grande.
L'écart est dû au modèle des sphère dures utilisé : les atomes se déforment dans l'alliage.

III.9) Il y a 3 sites octaédriques par maille (chaque centre des 6 faces étant partagé par 2 mailles). La formule pour l'hydrure contenant le maximum d'hydrogène est donc $\boxed{FeTiH_3}$.

III.10) La quantité de matière (d'atomes) d'hydrogène à stocker est $n(H) = \frac{m(H_2)}{M_H} = 5 \times 10^3\,\mathrm{mol}$.

À raison de 1,9 atome par maille, il faut $N = \frac{n(H)N_A}{1{,}9}$ mailles, de volume total $\boxed{V = Na^3 = \frac{n(H)N_A a^3}{1{,}9} = 4{,}2 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^3}}$ soit 42 L ce qui est proche d'un réservoir pour de l'essence.

III.11) $\boxed{P = \frac{nRT}{V} = \frac{m(H_2)RT}{2M_H V} = 1{,}47 \times 10^8\,\mathrm{Pa} = 1{,}47 \times 10^3\,\mathrm{bar}}$. C'est une pression énorme ce qui pose des problèmes de sécurité.