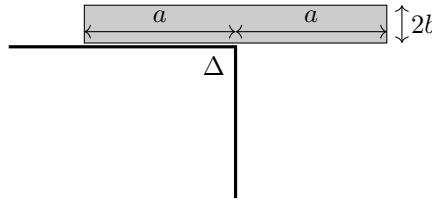


PROBLÈME I

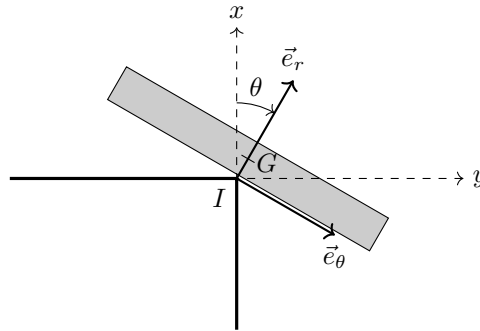
Chute d'une tartine beurrée

Ce problème propose une étude simplifiée de la chute d'une tartine beurrée posée sur le bord d'une table afin de déterminer la face qui rencontre le sol.

Une tartine modélisée par un parallélépipède rectangle droit, homogène, de dimensions $2a$, $2b$, $2c$, de centre d'inertie G , de masse m est posée sur le bord d'une table dans la position du schéma, G étant à la verticale d'un point I de l'arête Δ du coin de la table.



Dans cette position instable, elle subit une action très faible qui provoque son basculement autour de Δ , sans lui donner de vitesse initiale. La position de G à un instant donné est repérée par ses coordonnées cylindriques de centre I et d'axe Δ .



L'action de la table est modélisé par une force $\vec{R} = T \vec{e}_\theta + N \vec{e}_r$, orthogonale à Δ , dans le plan contenant G . Le moment d'inertie de la tartine par rapport à Δ est $J_\Delta = \frac{1}{3}m(a^2 + 4b^2)$.

On prendra $a = 4\text{ cm}$ et $b = 0,4\text{ cm}$ pour les applications numériques. Le champ de pesanteur est uniforme d'intensité $g = 9,8\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

I.1) Exprimer le théorème du moment cinétique pour la tartine relativement à l'axe Δ . En déduire que la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ vérifie :

$$\omega^2 = \frac{6gb(1 - \cos(\theta))}{a^2 + 4b^2}$$

I.2) Retrouver ce résultat par des considérations énergétiques.

I.3) Exprimer T et N en fonction de θ .

I.4) Calculer l'angle pour lequel la tartine perd le contact avec la table.

I.5) En fait elle quitte la table en glissant pour $\theta = \pi/4$. À ce moment $|T| = \mu|N|$ où μ est le coefficient de frottement entre la table et la tartine. Calculer μ .

Après avoir quitté la table, la tartine se retrouve en chute libre, tout en tournant sur elle-même avec la vitesse angulaire atteinte lors de son basculement pour $\theta = \pi/4$.

I.6) De quel angle aura-t-elle tourné lorsqu'elle atteindra le sol, la table étant de hauteur $h = 75\text{ cm}$? Commenter.

PROBLÈME II

Modèle planétaire de l'atome

Suite à sa découverte de l'électron, le physicien anglais Sir Joseph John Thomson (1856-1940) propose en 1904 de modéliser un atome comme une sphère de charge positive répartie uniformément dans laquelle les électrons se déplacent librement.

En 1911, le physicien néo-zélandais Ernest Rutherford (1871-1937) a réalisé une expérience cruciale, qui consiste à bombarder une mince feuille d'or avec les particules α émises par un corps radioactif. On constate que ces particules α ressortent de la feuille métallique, certaines étant fortement déviées. D'autres rebondissaient même.

Rutherford en déduit un modèle qui diffère du modèle de Thomson par une répartition différente de la charge positive : celle-ci se trouve maintenant dans un noyau quasi-ponctuel autour duquel orbitent les électrons, comme un système planétaire.

Ce problème étudie le mouvement d'une particule α dans l'expérience de Rutherford afin de valider le modèle planétaire, puis en montre les limites.

Données :

- charge électrique élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
- vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
- masse de l'électron $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Dans tout le problème, on notera $K = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$.

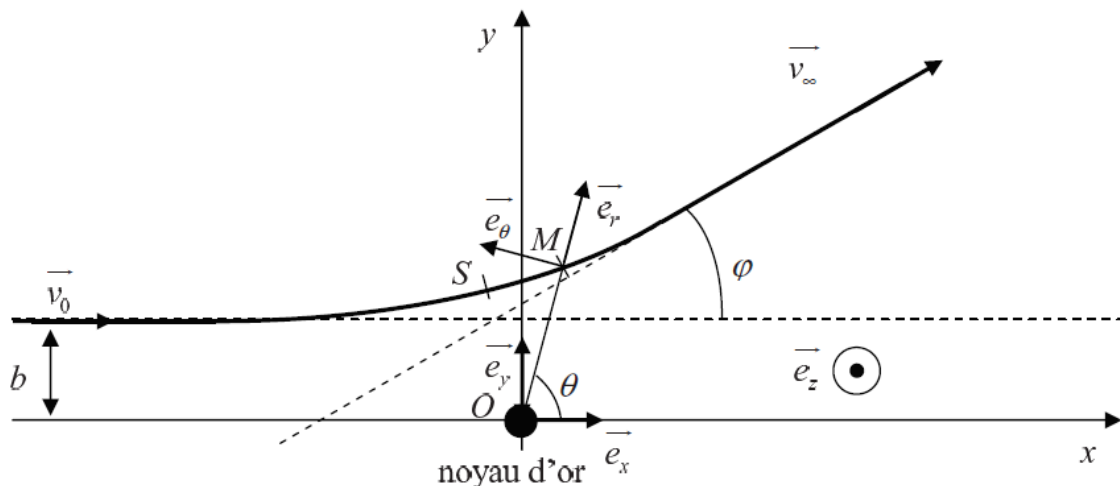
Partie A. Diffusion de Rutherford

Dans cette partie on étudie le mouvement d'une particule α lors de son passage à proximité d'un noyau d'or.

Le noyau d'or possède une charge positive $Q = Ze$ avec $Z = 79$ le numéro atomique de l'or. Il est supposé immobile dans le référentiel galiléen du laboratoire. Il se situe au point O , origine d'un repère cartésien orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Nous considérons une particule α , de masse m et de charge électrique positive $q = 2e$, venant initialement de l'infini avec un mouvement rectiligne uniforme caractérisé par un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0) = v_0 \vec{e}_x$. On désigne par b le paramètre d'impact, c'est-à-dire la distance du point O à la trajectoire de la particule à l'infini (voir figure).

La position de la particule est repérée par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.



II.1) Donner l'expression vectorielle de la force qui s'exerce sur la particule alpha. Montrer que cette force est conservative et exprimer l'énergie potentielle dont elle dérive.

II.2) Exprimer le moment cinétique initial $\vec{L}_O$ de la particule α par rapport à O . Pour cela, on pourra se placer à la position initiale de la particule telle que $\vec{OM}_0 = X\vec{e}_x + b\vec{e}_y$, où $X \rightarrow -\infty$.

II.3) Justifier que $\vec{L}_O$ se conserve. En déduire une relation entre r , $\dot{\theta}$, b et v_0 .

Pour déterminer expérimentalement le paramètre d'impact, on peut mesurer l'angle de déviation φ . Il faut alors trouver la relation qui lie φ à b .

II.4) Déterminer l'expression de l'accélération $a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y$, en fonction de m , b , v_0 , K , Z , θ et $\dot{\theta}$.

II.5) Intégrer cette équation entre $t = 0$ et $t \rightarrow \infty$. On remarquera que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta(t) \approx \varphi$. En déduire que la relation qui lie φ à b est : $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{2ZK}{mv_0^2 b}$.

On estime la taille caractéristique d'un noyau d'or par le paramètre d'impact maximal $b_{\max}$ provoquant une déviation supérieure à $\pi/2$ (« rebond ») de la particule α .

II.6) Dans l'expérience de Rutherford, l'énergie typique d'une particule alpha incidente est de 5 MeV. En déduire la taille caractéristique d'un noyau d'or.

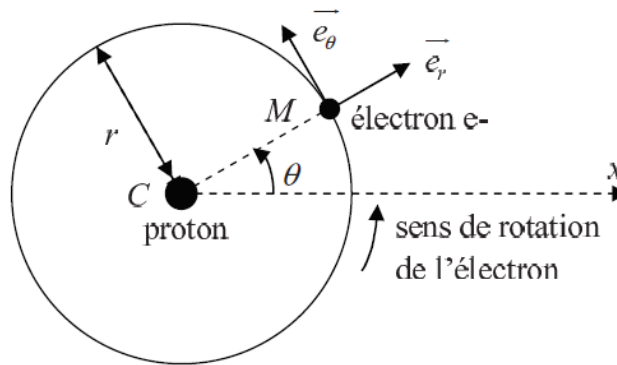
II.7) L'étude précédente suppose que les particules α n'entrent pas en collision avec le noyau. Vérifier que c'est le cas, même pour une particule qui arrive frontalement sur le noyau, c'est-à-dire avec un paramètre d'impact nul.

Partie B. Limite du modèle planétaire

Le modèle planétaire est en contradiction avec une loi classique de l'électromagnétisme : toute particule chargée et accélérée perd de l'énergie sous forme d'un rayonnement électromagnétique.

Pour mettre en évidence les conséquences de cette loi classique de l'électromagnétisme, nous allons étudier le mouvement de l'électron de l'atome d'hydrogène. Cet électron a un mouvement circulaire centré sur le noyau supposé fixe en un point C du référentiel du laboratoire supposé galiléen.

La position de l'électron est repérée par ses coordonnées polaires (r, θ) de centre C .



II.8) Déterminer l'expression de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ de l'électron.

II.9) Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m(r)$ de l'électron.

D'après la théorie de l'électromagnétisme, un électron possédant une accélération $\vec{a}$ émet un rayonnement de puissance donné par la formule de Larmor :

$$\mathcal{P} = \frac{2K}{3c^3} \vec{a}^2$$

On suppose la perte d'énergie faible, si bien que le rayon r varie peu sur un tour. Ainsi l'accélération et l'énergie mécanique gardent leurs expressions obtenues en l'absence de rayonnement.

II.10) Comment évolue le rayon de la trajectoire de l'électron au cours du temps ? Justifier.

II.11) Exprimer $\mathcal{P}$ en fonction de r et de constantes.

II.12) Montrer que le rayon de la trajectoire vérifie une équation différentielle de la forme : $r^2 \frac{dr}{dt} = -A$ avec A une constante positive que l'on écrira en fonction de c , m_e et K .

II.13) À $t = 0$, on suppose que l'électron se trouve sur une orbite de rayon $r_0 = 53 \text{ pm}$ correspondant au rayon atomique de l'hydrogène. Calculer le temps t_f mis par l'électron pour atteindre le noyau. Commenter le résultat obtenu.

PROBLÈME III

L'hydrogène, énergie du futur

L'hydrogène est considéré comme le vecteur d'énergie de demain. L'atome d'hydrogène, associé à l'atome d'oxygène, sous forme d'eau, est très abondant sur Terre et sa molécule, H_2 , est 2,5 fois plus énergétique que le gaz naturel. Il n'est ni polluant, ni toxique ; sa combustion dans l'air ne génère que de l'eau au contraire du gaz naturel ou du pétrole dont la combustion génère aussi du dioxyde de carbone.

Données :

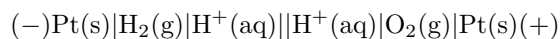
- masses molaires atomiques : $M_{\text{H}} = 1,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M_{\text{Fe}} = 55,8 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M_{\text{Ti}} = 47,9 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- rayons métalliques $r_{\text{Fe}} = 124 \text{ pm}$, $r_{\text{Ti}} = 146 \text{ pm}$
- constante d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- constante de Faraday : $1 \mathcal{F} = 9,65 \times 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$
- Potentiels redox standards à 333 K : $E^\circ(\text{H}^+(\text{aq})/\text{H}_2(\text{g})) = 0,00 \text{ V}$, $E^\circ(\text{O}_2(\text{g})/\text{H}_2\text{O}(\ell)) = 1,23 \text{ V}$
- $RT \ln(10)/\mathcal{F} = 0,066 \text{ V}$ à 333 K

Partie A. Pile à combustible

Le dihydrogène est le combustible idéal des piles à combustible, le moyen le plus efficace pour convertir l'énergie chimique en énergie électrique.

Nous étudions ici une cellule de pile à combustible constituée de deux électrodes entre lesquelles est disposée une membrane électrolyte polymère échangeuse d'ions H_3O^+ (noté aussi $\text{H}^+(\text{aq})$). La température de fonctionnement est comprise entre 60 et 90 °C, afin que la membrane conserve ses capacités de rétention d'eau. Les électrodes sont constituées de très petites particules de platine (2 à 3 nm) supportées par des poudres de carbone.

Par souci de simplification, nous symboliserons la pile par le schéma suivant :



III.1) Écrire le bilan des échanges électroniques se produisant respectivement à l'anode et à la cathode.

III.2) En déduire l'équation-bilan de la réaction de fonctionnement de la pile étudiée.

III.3) Préciser le rôle de la membrane électrolyte polymère ; pourquoi est-il nécessaire qu'elle conserve ses capacités de rétention d'eau ?

III.4) Calculer la force électromotrice de cette pile si la température est maintenue à 333 K et les pressions en $\text{H}_2(\text{g})$ et $\text{O}_2(\text{g})$ à 1 bar.

Lorsque la pile débite un courant de 125 A, la tension aux bornes d'une cellule est d'environ 0,7 V (ne vous inquiétez pas de l'écart à la valeur calculée à la question précédente).

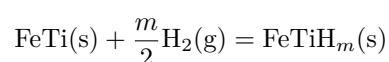
III.5) Quel est le nombre minimal de cellules à associer en série pour obtenir une puissance de 75 kW nécessaire au fonctionnement d'un moteur électrique ?

III.6) Cette association fonctionne pendant 1 h. Quelle masse de dihydrogène a été consommée ?

Partie B. Stockage du dihydrogène

Le stockage reste pour l'instant au centre des problèmes que pose l'utilisation du dihydrogène à bord d'un véhicule. Les constructeurs demandent en effet une autonomie de 500 km environ ; compte-tenu du pouvoir calorifique du dihydrogène il est nécessaire d'en stocker 5 kg.

On peut envisager de stocker le dihydrogène sous différentes formes : à l'état gazeux sous pression, à l'état liquide à basse température, à l'état condensé sous forme d'hydrure ionique. On se propose ici d'étudier l'une de ces dernières méthodes qui a l'avantage de présenter des garanties de sécurité, l'absorption du dihydrogène par le composé intermétallique fer/titane selon l'équation :



L'alliage FeTi a une maille cubique avec un atome de titane à chaque sommet du cube et un atome de fer au centre du cube.

III.7) Représenter la maille cubique de l'alliage de fer/titane.

III.8) Calculer le paramètre de maille a associé à cette maille en supposant que les atomes de fer et de titane sont en contact mais pas les atomes de fer entre eux. En déduire sa masse volumique ρ .

En réalité $a = 298 \text{ pm}$ $\rho = 6,53 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Proposer une explication simple aux écarts observés.

III.9) Les atomes d'hydrogène viennent se loger dans les sites octaédriques situés aux centres des faces. Donner la formule stœchiométrique de l'hydrure contenant le maximum théorique d'hydrogène. Justifier.

III.10) En réalité, l'absorption maximale d'hydrogène correspond à l'hydrure $\text{FeTiH}_{1,9}$ (il y a en moyenne 1,9 atomes d'hydrogène par maille). En supposant la maille toujours cubique et de paramètre $a = 298 \text{ pm}$, déterminer le volume d'alliage nécessaire au stockage de 5 kg de dihydrogène.

III.11) Sous quelle pression faudrait-il porter le dihydrogène à l'état gazeux à température ambiante afin qu'il occupe le même volume ? Commenter. On supposera le gaz parfait.