Chapitre 1 : Rappels et vocabulaire de base : algèbre et géométrie

Plan

1 Les mots

Il y a peu de mots vraiment utiles pour faire des mathématiques. Il faut cependant bien les utiliser :

- **et** ;
- **ou** (toujours inclusif : si on a : A **et** B alors on a : A **ou** B) ;
- **donc** ;
- **car** ;
- **or** ;
- **si**.

"Si" est source de beaucoup d'erreurs du type : "Si A est vrai ... donc A est vrai".

Les abréviations et les symboles $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$ donnent lieu à **beaucoup** d'abus et de confusions. Ils doivent être utilisés avec **beaucoup** de précautions ... A réserver aux équations et inéquations.

En particulier, écrire : "$A \Longrightarrow B$" n'est **pas** écrire : "*On a A donc, on a B*".
ggg
donc ou **si ... alors** et **si et seulement si**, à utiliser quand il faut et comme il faut...

Par contre les symboles :
- $\forall$ ("pour tout") ;
- $\exists$ ("il existe").

seront utilisés quotidiennement.

Le mot *"évident"* n'a pas de sens mathématique. Inutile et sans intérêt, il est **à proscrire**. Remplacer *"Racines évidentes"* par *"Racines"*.

2 Rappels sur les ensembles

Si A et B sont 2 ensembles, on peut définir l'intersection, la réunion, la différence de A et B :

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$$
$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$
$$A - B = \{x / x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

Si A est une partie de E, son **complémentaire** est :

$$\overline{A} = \complement_E^A = E - A$$

$A \times B$ est l'ensemble des **couples** formés avec A et B :

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$$

De même si $A_1, \ldots, A_n$ sont n ensembles, on définit leur **produit** :

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) / a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

Ses éléments s'appellent des **n-uplets**.

Si A est un ensemble :

$$A^n = \{(a_1, \dots, a_n)/a_1 \in A, \dots, a_n \in A\}$$

Si E est un ensemble et $A \subset E$, alors on dit que A est une **partie** de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. $\emptyset$ et E sont des parties de E.

3 Rappels de base sur les fonctions binomiales

Soit f la fonction réelle définie pour x réel par $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme réel de degré 2 avec $a > 0$, b et c réels.

On a la propriété d'identification :

Si pour tout x réels $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ alors $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$. (Ici a, a', b, b', c, c' sont réels. On a : $\mathrm{Min}_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(-\frac{b}{2a})$.

Théorème 1 (Équation de degré 2 réelle) *Dans les conditions précédentes, on pose :*

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x réel a 2 solutions et 2 seulement :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dans ce cas, pour tout x réel :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x réel a une solution et une seulement :

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

Dans ce cas, pour tout x réel :

$$f(x) = a(x - x_1)^2$$

Remarquons qu'on a, dans le cas $\Delta > 0$: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $\qquad x_1.x_2 = \frac{c}{a}$.

Remarquons qu'on a, dans le cas $\Delta = 0$: $x_1 + x_1 = -\frac{b}{a}$ $\qquad x_1.x_1 = \frac{c}{a}$.

On peut aussi considérer les équations "à la somme et au produit" : s et p sont 2 réels fixé.

Théorème 2 *Le problème d'inconnues α , β :*

$$(P)\begin{cases}\alpha+\beta=s\\ \alpha\beta=p\end{cases}$$

a des solutions réelles si et seulement si l'équation (E) : $x^2-sx+p=0$ a des solutions réelles c'est à dire $s^2-4p\geq 0$.

Si $s^2-4p\geq 0$ et si on note x_1, x_2 les solutions de (E) ($x_1=x_2$ dans le cas $s^2-4p=0$) alors (α,β) est solution de P si et seulement si

$$\{\alpha,\beta\}=\{x_1,x_2\}$$

4 Notations

On considère n, un entier naturel.
Si on a une famille finie $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ de nombres réels ou complexes, on pose :

$$\sum_{k=0}^{n}a_k=a_0+a_1+\cdots+a_n$$

lire : somme pour k allant de 0 à n des a_k et :

$$\prod_{k=0}^{n}a_k=a_0\cdot a_1\cdot\cdots\cdot a_n$$

lire : produit pour i allant de 0 à n des a_k.

Si I est un ensemble fini d'indices, on pose de même : $\sum_{i\in I}a_i$ et $\prod_{i\in I}^{n}a_i$ la somme et le produit pour i dans I des a_i.

Ainsi :

$$n!=\prod_{k=1}^{n}k=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n=1\cdots 2\cdots n$$

Avec la convention $0!=1$, on a si $n\in\mathbb{N}$: $(n+1)!=(n+1).n!$.

Quelques formules classiques, à connaître :

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Concernant les familles dites "doubles", on a la propriété de permutation des lignes et des colonnes :

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{ij} = \sum_{0\le i\le n, 0\le j\le m} a_{ij}$$

Par distribution :

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{m} b_j\right) = \sum_{0\le i\le n, 0\le j\le m} a_i \cdot b_j$$

L'opération $\sum$ est linéaire, c'est à dire, si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont 2 familles de nombres réels ou complexes et si λ et μ sont 2 réels ou complexes alors :

$$\sum_{i\in I}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i$$

Ensuite une formule **fondamentale**

Théorème 3 (Somme de la série géométrique) *Si a et b sont des réels (ou des complexes) et n est un entier naturel non nul :*

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ a^n - 1 &= (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1) \end{aligned}$$

En particulier, si $x \neq 1$ est réel (ou complexe) :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^{n-1} + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Définition 1 *On pose si $0 \le p \le n$ sont des entiers :*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} \in \mathbb{N}$$

*$\binom{n}{p}$ se lit "p dans n" et s'appelle **coefficient binomial**.*
Si $p > n$ ou si p ou n sont des entiers strictement négatifs, on convient : $\binom{n}{p} = 0$.

Dans les conditions précédentes, on observe :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Le résultat suivant permet de calculer les coefficients binomiaux de proche en proche (bien plus efficace que la formule précédente) à l'aide du **triangle de Pascal**

Théorème 4 (Triangle de Pascal) *Si p et n sont des entiers naturels :*

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Une des sources d'intérêt des coefficients binomiaux est la formule fondamentale suivante :

Théorème 5 *Si a et b sont des nombres réels ou complexes et n est un entier naturel :*

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

5 Géométrie de base dans le plan : formulaire pour les autres matières scientifiques.

On muni le plan (qu'on notera souvent $\mathbb{R}^2$ d'un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

Les coordonnées d'un point M sont souvent notées : (x, y) ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, celle d'un vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ ce qui correspond à :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} \qquad \overrightarrow{u} = u_x\overrightarrow{\imath} + u_y\overrightarrow{\jmath}$$

Une droite D du plan a une équation de la forme $D : ax + by = c$ (a, b et c sont des réels avec a et b non tous les 2 nuls).

Les droites $D : ax + by = c$ et $D : a'x + b'y = c'$ sont parallèles (ou confondues) si et seulement si $ab' - a'b = 0$ autrement vit les vecteurs (a, b) et (a', b') sont proportionnels.

Si les droites $D : ax + by = c$ et $D : a'x + b'y = c'$ ne sont pas parallèles, leur intersection qui est un point se détermine en résolvant le système linéaire :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

par combinaisons de lignes.

Dans le cas où le repère est orthonormé direct et qu'on considère des vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$, on dispose du produit scalaire, du déterminant et de la norme :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = u_xv_x + u_yv_y \qquad \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_xv_y - u_yv_x$$

$$\|\overrightarrow{u}\| = \left\|\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \quad , \quad \|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$$

Le produit scalaire et le déterminant mesurent respectivement le parallélisme (ou la proportionnalité) et l'orthogonalité : si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ sont des vecteurs :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \text{ si et seulement } \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \qquad \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \text{ si et seulement } \overrightarrow{u} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{v}$$

Á noter, dans les conditions précédentes :

- $u_x = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{i}$
- $u_y = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{j}$

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont 2 vecteurs du plan, alors :

- $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \cdot \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \cdot \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$

6 Géométrie de base dans l'espace : formulaire pour les autres matières scientifiques.

On muni l'espace (qu'on notera souvent $\mathbb{R}^3$) d'un repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

Les coordonnées d'un point M sont souvent notées : $M : (x, y, z)$ ou $M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, celle d'un vecteur $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ ce qui correspond à :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} + z\,\overrightarrow{k} \qquad \overrightarrow{u} = u_x\,\overrightarrow{\imath} + u_y\,\overrightarrow{\jmath} + u_z\,\overrightarrow{k}$$

Un plan P de l'espace a une équation de la forme : $P : ax + by + cz = d$ (a, b, c et d sont des réels avec a, b et c non tous les 3 nuls).

Les plans $P : ax + by + cz = d$ et $P : a'x + b'y + cz = d'$ sont parallèles (ou confondus) si et seulement si les vecteurs (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnels. Dans le cas contraire, le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

forme un système d'équations de la droite $P \cap P'$.

Dans le cas où le repère est orthonormé et qu'on considère des vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$, on dispose du produit scalaire, du produit vectoriel et de la norme :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \quad , \quad \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{u}\| = \left\| \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \quad , \quad \|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$$

Á noter, dans les conditions précédentes :

- $u_x = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{i}$
- $u_y = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{j}$
- $u_z = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{k}$

Le produit vectoriel et le produit scalaire et mesurent respectivement le parallélisme (ou la proportionnalité) et l'orthogonalité : si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \text{ si et seulement } \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \quad , \quad \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si et seulement } \overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$$

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont 2 vecteurs de l'espace, alors :

- $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{u}$
- $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \perp \overrightarrow{v}$
- $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = |\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| \cdot \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$

Savoirs et savoirs faire indispensables

Savoirs

Formules sur l'équation de degré 2. Formule de la série géométrique, de la série arithmétique. Somme des carrés. Formule du binôme.

Savoir-faire

Savoir reconnaitre une somme géométrique, arithmétique, binomiale et, dans ce cas, appliquer les formules du cours.