Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 4 Septembre 2025.

Fiche 2 : Td du 4/09.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2 \times 3^n - 1$$

2. Simplifier pour $n \in \mathbb{N}$ l'expression $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exercice 2

Écrire à l'aide du symbole sigma puis exprimer sous la forme la plus simple possible (n est un entier non nul) :

1. $S_1 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1)$.
2. $S_3 = 1 + 2 + 4 \cdots + 2^n$.
3. $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe des entiers uniques a_n et b_n tel que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, puis que $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.
On admettra que $\sqrt{3}$ *est un nombre irrationnel*

Exercice 4

1. Pour $k > 0$, simplifier : $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Exercice 5 : Une méthode pour évaluer $\sum_{k=1}^{n} k^3$

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, évaluer $k^4 - (k-1)^4$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire une expression simplifiée de :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Exercice 6

Exprimer sous la forme la plus simple possible (n est un entier non nul) :

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n} (2i+1) \quad ; \quad S_2 = \sum_{1\leq k\leq n} k(n+1-k) \quad ; \quad S_3 = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2$$

Exercice 7

Soit x un réel tel que $x + \frac{1}{x}$ soit entier (relatif). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier.