Sup MPSI, Lycée Jean Perrin, 2 Septembre 2025.

Fiche 1 : calculs de base.

Exercice 1

Développer $(a+b)^3$; $(a-b)^3$; $(a+b)^2+(a-b)^2$; $(a+b)^2-(a-b)^2$.
(a, b sont des réels).

Exercice 2

Soit x et y des réels. Montrer que si $x+y=1$ alors $x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 3

Soient x et y des réels strictement positifs, montrer que :

1. $x+\frac{1}{x} \geq 2$ (cas d'égalité ?) ;
2. $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ (cas d'égalité ?) ;

Exercice 4

x, y et z sont des réels.

1. Développer $(x+y+z)(xy+yz+zx)$, $(x+y+z)^3$.
2. Montrer que si $x+y+z=0$, alors $x^3+y^3+z^3=3xyz$

Exercice 5

Résoudre les équations ou inéquations d'inconnue x réelle :

1. $4x^4-21x^2+27=0$;
2. $\frac{1}{x+3}+\frac{2}{x+4}=\frac{1}{x}$;
3. $(5-2x)^2 > (2x-5)(x-2)$;
4. $\sqrt{x^2+2x+4}=3x+2$;
5. $x+3 \leq \sqrt{x^2+4}$;
6. $x+1 < \sqrt{x+2}$.

Exercice 6

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n=(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n$. Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_{n-1}=2u_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: u_n est un entier pair.

Exercice 7

On considère : $\alpha > \beta$ les racines du polynôme $P=x^2-x-1$.
et d'autre part $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite (dite de **Fibonacci**) définie par :

$$\begin{cases} F_0=0,\ F_1=1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad F_{n+1}=F_n+F_{n-1} \end{cases}$$

1. Calculer les premiers termes de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ montrer que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers.
2. Calculer α et β.
3. Montrer par récurrence avec prédécesseur que si n est un entier :

$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$$