Chapitre P0

Grandeurs physiques

I. Système international (SI)

I.1) Défintion du SI

Une **grandeur physique** est une propriété d'un phénomène ou d'une substance **mesurable expérimentalement**.
Exemples : la vitesse du son, la température de la pièce, la masse de la Terre, ...

La valeur d'une grandeur s'exprime comme le produit d'un nombre par une **unité**. L'unité est une grandeur de référence ayant la même **dimension** (c'est-à-dire la même nature) que la grandeur mesurée.
Exemple : la hauteur de la tour Eiffel est de 324 m, c'est-à-dire que c'est une longueur 324 fois plus grande qu'un mètre.

Pour faciliter les échanges, il est important que les unités soient définies de façon précise et universelle. C'est le rôle du **Système International d'Unités (SI)** décidé par le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM).

Les grandeurs ne sont pas indépendantes les unes des autres : elles sont liées entre elles soient par des définitions ($v = d/t$) soit par des lois physiques ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$). Par conséquent les unités ne sont pas indépendantes non plus.
Le SI a choisi **7 grandeurs de base**, et définit une unité pour chacune d'entre elles :

Grandeur	**Dimension**	**Unité**	**Symbole**
masse	M	kilogramme	kg
longueur	L	mètre	m
temps	T	seconde	s
courant électrique	I	ampère	A
température thermodynamique	Θ	kelvin	K
quantité de matière	N	mole	mol
intensité lumineuse	J	candela	cd

Depuis le 20 mai 2019, ces unités sont définies de telle sorte que 7 constantes universelles aient une valeur exacte :

Le Système international d'unités (SI) est le système d'unités selon lequel :
- la fréquence de la transition hyperfine de l'état fondamental de l'atome de césium 133 non perturbé, $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$, est égale à 9 192 631 770 Hz,
- la vitesse de la lumière dans le vide, c, est égale à 299 792 458 m/s,
- la constante de Planck, h, est égale à $6{,}626\,070\,15 \times 10^{-34}$ J · s,
- la charge élémentaire, e, est égale à $1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$ C,
- la constante de Boltzmann, k, est égale à $1{,}380\,649 \times 10^{-23}$ J/K,
- la constante d'Avogadro, N_A, est égale à $6{,}022\,140\,76 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$,
- l'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz, K_{cd}, est égale à 683 lm/W,

où les unités hertz, joule, coulomb, lumen et watt, qui ont respectivement pour symbole Hz, J, C, lm et W, sont reliées aux unités seconde, mètre, kilogramme, ampère, kelvin, mole et candela, qui ont respectivement pour symbole s, m, kg, A, K, mol et cd, selon les relations $\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$, $\mathrm{J} = \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$, $\mathrm{lm} = \mathrm{cd} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{m}^{-2} = \mathrm{cd} \cdot \mathrm{sr}$, et $\mathrm{W} = \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3}$.

I.2) Autres unités

Les autres grandeurs ont des unités dérivées composées des unités de base. Certaines d'entre elles ont un nom spécifique :

Grandeur dérivée	Unité	Symbole	Définition	Dimension
angle plan	radian	rad	m/m	1
angle solide	stéradian	sr	m^2/m^2	1
fréquence	hertz	Hz	s^{-1}	T^{-1}
force	newton	N	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$	$\mathsf{M.L.T}^{-2}$
pression, contrainte	pascal	Pa	N/m^2	$\mathsf{M.L}^{-1}.\mathsf{T}^{-2}$
énergie, travail, quantité de chaleur	joule	J	$N \cdot m$	$\mathsf{M.L}^2.\mathsf{T}^{-2}$
puissance, flux énergétique	watt	W	J/s	$\mathsf{M.L}^2.\mathsf{T}^{-3}$
charge électrique	coulomb	C	$A \cdot s$	$\mathsf{I.T}$
différence de potentiel électrique	volt	V	W/A	$\mathsf{M.L}^2.\mathsf{T}^{-3}.\mathsf{I}^{-1}$
capacité électrique	farad	F	C/V	$\mathsf{M}^{-1}.\mathsf{L}^{-2}.\mathsf{T}^4.\mathsf{I}^2$
résistance électrique	ohm	Ω	V/A	$\mathsf{M.L}^2.\mathsf{T}^{-3}.\mathsf{I}^{-2}$
conductance électrique	siemens	S	1/Ω	$\mathsf{M}^{-1}.\mathsf{L}^{-2}.\mathsf{T}^3.\mathsf{I}^2$
flux d'induction magnétique	weber	Wb	$V \cdot s$	$\mathsf{M.L}^2.\mathsf{T}^{-2}.\mathsf{I}^{-1}$
induction magnétique	tesla	T	Wb/m^2	$\mathsf{M.T}^{-2}.\mathsf{I}^{-1}$
inductance	henry	H	Wb/A	$\mathsf{M.L}^2.\mathsf{T}^{-2}.\mathsf{I}^{-2}$
température Celsius$^{(*)}$	degré Celsius	°C	K	Θ

Note (*)

> La température Celsius t est liée à la température thermodynamique T par la relation : $t/°C = T/K - 273{,}15$.
> Une différence de température a la même valeur en degré Celsius et en Kelvin, d'où $1\,°C = 1\,K$ en amplitude.

D'autres unités sont néanmoins parfois utilisées, par habitude. Le passage aux unités de base se fait à l'aide d'une **conversion**.

Grandeur	Nom de l'unité	Symbole	Valeur en unités SI
temps	minute	min	$1\,\text{min} = 60\,\text{s}$
temps	heure	h	$1\,\text{h} = 60\,\text{min} = 3600\,\text{s}$
temps	jour	d	$1\,\text{d} = 24\,\text{h} = 86\,400\,\text{s}$
angle plan	degré	°	$1° = (\pi/180)\,\text{rad}$
angle plan	minute d'arc	′	$1' = (1/60)\,° = (\pi/10\,800)\,\text{rad}$
angle plan	seconde d'arc	″	$1'' = (1/60)\,' = (\pi/648\,000)\,\text{rad}$
longueur	unité astronomique	au	$1\,\text{au} = 149\,597\,870\,700\,\text{m}$
superficie	hectare	ha	$1\,\text{ha} = 1\,\text{hm}^2$
volume	litre	L	$1\,\text{L} = 1\,\text{dm}^3$
masse	tonne	t	$1\,\text{t} = 10^3\,\text{kg}$
énergie	électron-volt	eV	$1\,\text{eV} = 1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\text{J}$
vergence	dioptrie	δ	$1\,\delta = 1\,\text{m}^{-1}$
pression	bar	bar	$1\,\text{bar} = 10^5\,\text{Pa}$
énergie	kilowattheure	kWh	$1\,\text{kWh} = 3{,}6 \times 10^6\,\text{J}$

I.3) Préfixes

De plus, une série de **préfixes** ont été adoptés pour exprimer les valeurs des grandeurs beaucoup plus grandes ou plus petites que l'unité SI elle-même :

Puissance	Nom	Symbole
10^1	déca	da
10^2	hecto	h
10^3	kilo	k
10^6	méga	M
10^9	giga	G
10^{12}	téra	T
10^{15}	péta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zetta	Z
10^{24}	yotta	Y
10^{27}	ronna	R
10^{30}	quetta	Q

Puissance	Nom	Symbole
10^{-1}	déci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	µ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y
10^{-27}	ronto	r
10^{-30}	quecto	q

II. Analyse dimensionnelle

II.1) Dimension d'une grandeur

Puisque les grandeurs sont liées entre elles, on peut exprimer la dimension de toute grandeur en fonction des dimensions des grandeurs de base, sous forme d'un **produit dimensionnel** :

$$\text{dim(grandeur)} = \mathsf{M}^{\alpha}.\mathsf{L}^{\beta}.\mathsf{T}^{\gamma}\dots$$

La même relation vaut alors pour les unités (notées entre crochets) : $[\text{grandeur}] = \text{kg}^{\alpha} \cdot \text{m}^{\beta} \cdot \text{s}^{\gamma}\dots$

On détermine les exposants α, β, γ... en utilisant les définitions et lois qui lient les grandeurs entre elles.
Exemple : $v = d/t$ donc $\dim(v) = \mathsf{L}.\mathsf{T}^{-1}$ et $[v] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Remarque : dans l'écriture différentielle $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, les éléments différentiels dx et dt ont même dimension que x et t.

Lorsque tous les exposants sont nuls, la dimension est égale à 1 : on parle de grandeur **sans dimension**.
Exemples : facteurs numériques, angles.

Exercice

Déterminer la dimension des grandeurs suivantes.

1. volume V

2. masse volumique ρ

3. accélération a

4. force F

5. pression P

6. énergie $\mathcal{E}$

7. puissance $\mathcal{P}$

8. résistance électrique R

9. constante de Planck h

II.2) Homogénéité

On ne peut ajouter, soustraire ou comparer (signes $=$, $<$ ou $>$) que des grandeurs **de même dimension**. On dit qu'une équation doit être **homogène**. Tout résultat non homogène est nécessairement faux.

Exemple : la relation $v = \lambda f$ (où v est une vitesse, λ une longueur d'onde et f une fréquence) est homogène car $\dim(\lambda f) = \dim(\lambda) \times \dim(f) = \mathsf{L} \times \mathsf{T}^{-1} = \dim(v)$

Remarque : les arguments des fonctions mathématiques, ainsi que leurs valeurs, sont nécessairement sans dimension.

Exercice

Vérifier l'homogénéité des relations suivantes. Pour celles qui ne le sont pas, proposer une modification simple afin de les rendre homogènes.

1. vitesse v de propagation de la houle dans une eau de profondeur h dans un champ de pesanteur d'intensité g : $v = \sqrt{gh}$

2. Rayon r du champignon lors de l'explosion d'une bombe atomique en fonction du temps t écoulé, de l'énergie $\mathcal{E}$ libérée par la bombe et de la masse volumique ρ_a de l'air : $r = \dfrac{\mathcal{E}t^2}{2\rho_a}$

3. Équation différentielle vérifiée par l'angle (relativement à la verticale) φ d'un pendule de masse m et de longueur ℓ, lorsqu'il oscille dans un champ de pesanteur g : $\ell\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + mg\sin(\varphi) = 0$

4. Longueur d'onde (Compton) λ_C, en fonction de la constante de Planck h, de la masse d'un électron m_e et de la vitesse de la lumière dans le vide c : $\lambda_C = \dfrac{hc}{m_e}$

5. Pression P de l'eau en fonction de la profondeur h, de l'intensité de la pesanteur g et de la masse volumique ρ_e de l'eau et de la pression P_0 à la surface : $P = P_0 - \rho_e g h$

II.3) Prédiction de résultats par analyse dimensionnelle

Grâce à l'analyse dimensionnelle, on peut prédire des lois physiques. Pour ce faire, on utilise une **intuition** des grandeurs qui sont liées entre elles dans un phénomène. La contrainte de l'homogénéité permet parfois de déterminer une unique relation possible.

Méthode :

— on suppose que la grandeur y dépend des grandeurs x_1, x_2 et x_3 ;

— on écrit alors une relation générale entre ces grandeurs : $y = kx_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}$ avec k un facteur numérique ;

— on impose l'homogénéité de la relation, ce qui permet d'écrire une équation pour chaque dimension de base ;

— si c'est possible, on résout le système obtenu afin de déterminer les exposants a_1, a_2 et a_3.

Exercice

La fréquence f du son joué par une corde vibrante dépend a priori de la longueur L et de la masse volumique ρ de la corde, ainsi que de la force T qui la tend.
On pose $f = k\rho^\alpha L^\beta T^\gamma$ avec k une constante sans dimension.

Déterminer les exposants α, β et γ par analyse dimensionnelle.

III. Écriture des grandeurs

III.1) Notations utilisées

On écrit un résultat numérique en notation décimale ou en **notation scientifique** :

$$a \times 10^n \qquad \text{avec } a \in [1;10[\quad \text{et } n \in \mathbb{Z}$$

La notation scientifique est pratique pour effectuer des conversions avec l'utilisation des préfixes du SI qui sont des puissances de 10.

Exercice

Effectuer les conversions suivantes en utilisant la notation scientifique.

1. $185\,\mathrm{MW}$ en W
2. $0{,}025\,\mathrm{L}$ en mL
3. $20{,}0\,\mathrm{nm}$ en mm
4. $10{,}0\,\mathrm{cm^2}$ en $\mathrm{m^2}$
5. $0{,}032\,\mathrm{m^3}$ en $\mathrm{mm^3}$
6. $3{,}0\,\mathrm{cm \cdot ms^{-1}}$ en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$
7. $7{,}65 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ en $\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$
8. $30\,\mathrm{kJ}$ en $\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$

III.2) Chiffres significatifs

Les chiffres significatifs du résultat sont les chiffres qui apportent une information sur la précision de cette valeur.
Exemple : on mesure la largeur d'une feuille A4 avec une règle graduée en mm. Le résultat est connu au mm près : il s'écrit 21,0 cm, et non 21 cm.

Par conséquent, les chiffres significatifs sont les chiffres écrits à partir du premier chiffre non-nul. Ils ne sont pas affectés par l'utilisation de la notation scientifique ou un changement de préfixe.
Exemple : $21{,}0\,\text{cm} = 0{,}210\,\text{m} = 2{,}10 \times 10^{-1}\,\text{m}$.

Remarque : les 0 à gauche ne comptent pas, mais les 0 à droite comptent car ils indiquent la précision de la mesure. La notation scientifique présente l'avantage de n'écrire que les chiffres significatifs.
Exemple : si une distance de 400 m environ n'est connu qu'au décamètre près, il est nécessaire d'écrire $4{,}0 \times 10^2\,\text{m}$.

Exercice

Donner le nombre de chiffres significatifs des nombres suivants, puis les écrire avec 3 chiffres significatifs. en utilisant la notation scientifique. On arrondira si nécessaire.

1. 1255
2. 6,79
3. 0,4
4. 32 000
5. 299 792 458
6. $1{,}602\,176\,634 \times 10^{-19}$

III.3) Règles de calcul

Quand on effectue des calculs, la précision des données de départ se répercute sur celle du résultat. On effectue d'abord le calcul sans approximation, puis on arrondit en respectant les règles suivantes :

— addition et soustraction : on écrit les données dans la même unité avant le calcul. Celle qui est la moins précise va imposer la précision du résultat. Autrement dit, on arrondit le résultat afin qu'il ait autant de **décimales** que la grandeur de départ qui en a le moins.

— multiplication et division : le résultat a autant de **chiffres significatifs** que la grandeur qui en a le moins.

— fonctions usuelles : le résultat a le même nombre de chiffres significatifs que l'argument.

Remarque : les constantes apparaissant dans les formules littérales sont **exactes**, tout se passe comme si elles étaient écrites avec un nombre infini de chiffres significatifs.
Exemple : le 1 dans la relation $f = 1/T$.

Exercice

Exprimer, avec le nombre correct de chiffres significatifs, les résultats des opérations suivantes :

1. $12{,}3 + 3$
2. $4{,}28 - 0{,}58$
3. $4{,}5 \times 10^3 - 382$
4. $4{,}12 \times 5{,}0$
5. $\dfrac{4{,}58 \times 3{,}6}{2{,}10}$
6. $\cos(0, 72)$

Exercice 1. Conversions (★)

Effectuer les conversions suivantes, en utilisant la notation scientifique.

1. $3{,}0\,\mu\text{m}$ en km
2. $8{,}2 \times 10^{-8}$ t en g
3. $20\,\text{cm}^2 \cdot \text{ms}^{-1}$ en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
4. $0{,}22\,\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$
5. $3{,}4 \times 10^3$ tours $\cdot\,\text{min}^{-1}$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
6. $30\,\text{kJ} \cdot \text{cm}^{-1}$ en N

Exercice 2. Calculs numériques (★)

Calculer les grandeurs suivantes et donner le résultat dans les unités du système international (ou avec une grandeur dérivée mais sans préfixe). Attention à la priorité des opérations dans la recherche du nombre de chiffres significatifs.

1. Fréquence f d'un signal de période $T = 28\,\mu\text{s}$.
2. Périmètre p et superficie S d'un rectangle de côtés $L = 14{,}6\,\text{cm}$ et $\ell = 5{,}4\,\text{cm}$.
3. Célérité c de la houle dans une mer de profondeur $h = 45\,\text{cm}$.
   Donnée : $c = \sqrt{gh}$ où $g = 9{,}81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ est l'intensité du champ de pesanteur.
4. Masse volumique de l'air ρ_a à la pression $P = 1{,}02\,\text{bar}$ et à la température $\theta = 25\,°\text{C}$.
   Donnée : $\rho_a = \dfrac{MP}{RT}$ où $M = 28{,}96\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ est la masse molaire de l'air, $R = 8{,}314\,\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ est la constante des gaz parfait et T est la température en Kelvin.

Exercice 3. Période d'un pendule (★★)

Un pendule est constitué d'un fil de longueur L et de masse négligeable au bout duquel est attachée une bille de masse m et de volume négligeable. L'autre extémité étant fixée à un clou, le pendule peut osciller de part et d'autre de la verticale sous l'effet de la pesanteur. La période T de ces oscillations dépend *a priori* de m, L et de g, l'intensité de la pesanteur. On pose $T = km^\alpha L^\beta g^\gamma$ avec k un facteur numérique.

1. Déterminer les exposants α, β et γ par analyse dimensionnelle.
2. Que remarque-t-on ? Était-ce prévisible ?
3. Un pendule de 1 m bat la seconde, c'est-à-dire a une période très proche de 2 s. En déduire la valeur de k (on prendra $g = 9{,}81\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$). À quel nombre exact ce résultat fait-il penser ?

Exercice 4. Troisième loi de Kepler (★★)

1. Rappeler la loi de Newton pour l'interaction gravitationnelle.
2. En déduire la dimension de la constante de gravitation $\mathcal{G}$.
3. La période de révolution T d'une planète dépend du demi-grand axe a de son orbite, de la constante de gravitation $\mathcal{G}$ et de la masse du Soleil M_S. En utilisant une analyse dimensionnelle, déterminer la relation qui lie ces grandeurs, à un facteur numérique près.

Exercice 5. Cuisson d'un poulet (★★★)

La cuisson d'un poulet dans un four se fait par conduction thermique de l'extérieur vers l'intérieur. La rapidité de ce phénomène dépend de la taille d du poulet (son diamètre moyen), de sa masse volumique ρ, de sa capacité thermique massique c et de sa conductivité thermique λ d'unité $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Rappel : la variation d'énergie (interne) ΔU d'un corps de masse m et de capacité thermique massique c lors d'une élévation de température ΔT est $\Delta U = mc\Delta T$.

1. Déterminer la dimension de c et λ.
2. Par analyse dimensionnelle, proposer une relation reliant la durée de cuisson aux différents paramètres impliqués.
3. Il faut 1 h de cuisson pour cuire un poulet de 1 kg, combien en faut-il pour un poulet de 2 kg ?

Réponses

Exercice 1 : 1. $3{,}0 \times 10^{-9}\,\text{km}$; 2. $8{,}2 \times 10^{-2}\,\text{g}$; 3. $2{,}0\,\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; 4. $2{,}2 \times 10^{-4}\,\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$; 5. $3{,}6 \times 10^2\,\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$; 6. $3{,}0 \times 10^6\,\text{N}$.

Exercice 2 : 1. $f = 3{,}6 \times 10^4\,\text{Hz}$; 2. $p = 4{,}00 \times 10^{-1}\,\text{m}$; $S = 7{,}9 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$; 4. $c = 2{,}1\,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; 5. $\rho = 1{,}19\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Exercice 3 : 1. $\alpha = 0$; $\beta = \dfrac{1}{2}$; $\gamma = -\dfrac{1}{2}$; 3. $k = 6{,}26$.

Exercice 4 : 2. $\dim(\mathcal{G}) = \mathsf{M}^{-1}\,\mathsf{L}^3\,\mathsf{T}^{-2}$; 3. $T = ka^{3/2}\mathcal{G}^{-1/2}M_S^{-1/2}$.

Exercice 5 : 1. $\dim(c) = \mathsf{L}^2\,\mathsf{T}^{-2}\,\Theta^{-1}$; $\dim(\lambda) = \mathsf{M}\,\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-3}\,\Theta^{-1}$; 2. $\Delta t = k\dfrac{\rho c d^2}{\lambda}$; 3. $\Delta t \approx 95\,\text{min}$.